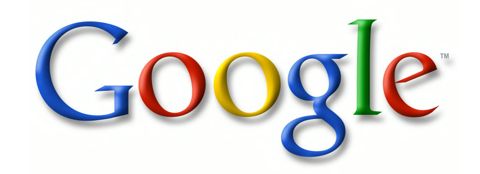





600044423N





# Sammlung von Aufgaben

aus der

# Differential- und Integralrechnung.



Von

*L. A. Sohncke,*

ord. Professor an der Universität zu Halle.

**Halle,**

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1850.

# Vorwort.

Da die bis jetzt bekannten Sammlungen von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung mir nach meinen bisherigen Erfahrungen den Bedürfnissen, die sich bei meinen Zuhörern herausstellten, nicht zu genügen schienen, so entschloss ich mich, eine Zusammenstellung der mir passend scheinenden Probleme zu veranstalten. Es versteht sich von selbst, dass ich nicht jede einzelne Sache als ein mir selbst angehöriges Eigenthum in Anspruch nehmen kann, noch will. Es liegt in der Natur der Sache, dass ich Beispiele, wo ich sie eben gefunden habe, und wie sie mir gerade am passendsten schienen, eingereiht habe. Ueberall anzuführen, wo dieses oder jenes Beispiel entnommen ist, wäre theils zu weitläufig, theils unausführbar gewesen, deshalb habe ich es, ohne Befürchtung, eines Plagiats beschuldigt zu werden, durchgängig unterlassen.

Diejenigen Dinge, welche mein wirkliches Eigenthum sind, lassen sich bei einem aus so vielen Einzelnheiten bestehenden Werke nicht füglich angeben.

Vielleicht dürfte die Partie über die independente Darstellung der Differentialquotienten höherer Ordnung einige Beachtung verdienen *).

---

*) Auch hier verdankt der Verf. sehr viel der ausgezeichneten Arbeit seines ehemaligen Zuhörers Hoppe: Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845.

Bei den bestimmten Integralen habe ich die, welche gewöhnlich von dieser Gattung behandelt werden, wie die Euler'schen Integrale u. dergl. gänzlich weggelassen, da sie mir ohne eine weitläufige Deduction nicht anschaulich und also als Aufgabe nicht zweckmässig erschienen. In deren Stelle habe ich in der letzten Abtheilung von S. 294 ab mehre Anwendungen der bestimmten Integrale auf geometrische Aufgaben gegeben, wie man sie sonst wohl nicht gewöhnlich in solcher Ausführung dargestellt findet.

Ueber die Zweckmässigkeit der Anordnung in gegenwärtiger Zusammenstellung muss ich das Urtheil Anderen überlassen.

Halle, den 13. December 1849.

**Der Verfasser.**

# Inhalt.

# I. Differentialquotienten der ersten Ordnung expliciter Funktionen einer Variabele.

## A. Differentialquotienten algebraischer Funktionen.

### §. 1.

Die Differentialquotienten algebraischer Funktionen werden mit Hilfe folgender Gesetze gefunden:

Wenn $u$, $v$, $w$ ..... Funktionen der einen, unveränderlichen $x$ sind, so hat man:

a) $d\left\{u \pm v \pm w \pm \ldots\right\}_x = du_x \pm dv_x \pm dw_x \pm \ldots$

b) $d\left\{u . v . w \ldots\right\}_x = \frac{1}{u . v . w \ldots}\left\{\frac{du_x}{u} + \frac{dv_x}{v} + \frac{dw_x}{w} + \ldots\right\}$

c) $d\left\{\frac{u}{v}\right\}_x = \frac{u}{v}\left\{\frac{du_x}{u} - \frac{dv_x}{v}\right\}$

d) $d\left\{u^n\right\}_x = n . u^{n-1} . du_x$, wo $n$ jede beliebige, wenn nur constante Zahl, bedeutet.

Als Hilfssatz zur Bequemlichkeit im Rechnen dient noch folgender Satz:

Wenn $u = \varphi(z)$ und $z = \psi(x)$, also mittelbar $u = f(x)$ ist, so wird $du_x = du_z . dz_x$.

### §. 2.

Beispiele.

1) $y = x^n$

$dy_x = nx^{n-1}$

2) $y = a . x^n$

$dy_x = n . a . x^{n-1}$

3) $y = \frac{x^n}{a}$

$dy_x = \frac{n}{a} x^{n-1}$

4) $y = (a + bx)^m$

$dy_x = mb(a + bx)^{m-1}$

5) $y = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \right\}^m$

$dy_x = m \left\{ b + 2cx + 3dx^2 \ldots \right\} . \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \right\}^{m-1}$

6) $y = \sqrt[n]{(a + bx)^m}$

$dy_x = \frac{m}{n} b . \frac{1}{\sqrt[n]{(a + bx)^{n-m}}}$

7) $y = \sqrt[n]{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots}$

$dy_x = \frac{\frac{1}{n} \left\{ b + 2cx + 3dx^2 + \ldots \right\}}{\sqrt[n]{\left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots \right\}^{n-1}}}$

8) $y = \sqrt[n]{\left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \right\}^m}$

$dy_x = \frac{\frac{m}{n} \left\{ b + 2cx + 3dx^2 + \ldots \right\}}{\sqrt[n]{\left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \right\}^{m-n}}}$

9) $y = 25x + 10x^2 + \frac{4}{3} x^3$

$dy_x = (5 + 2^x)^2$

10) $y = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^4 + \frac{13}{5} x^5 + 2x^6 + \frac{4}{7} x^7$

$dy_x = x^2 (1 + 3x + 2x^2)^2$

11) $y = \frac{1}{16} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{7} x^7 - \frac{1}{2} x^8$

$dy_x = x^3 (\frac{1}{4} - x^2)(1 + 2x)^2$

12) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30 \sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

$dy_x = 8 \sqrt[5]{x^3} + \frac{2 \sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x \sqrt[3]{x}}$

13) $y = 27x^3 - \frac{81}{2} x^2 \sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5} x \sqrt[3]{x^2}$

$dy_x = \left\{ 2 \sqrt[3]{x} + \frac{6x}{\sqrt[3]{x}} - 9x \right\}^2$

14) $y = 2 \sqrt[3]{x} \left\{ \frac{54}{5} x \sqrt[3]{x} + \frac{108}{11} x \sqrt{x} + \frac{27}{7} \sqrt[6]{x^5} + \frac{72}{7} \sqrt[4]{x} + 9 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} \right\}$

$dy_x = \sqrt[6]{x^{-5}} \left\{ 6 \sqrt[4]{x^3} + 3 \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right\}^2$

15) $y=\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}-\frac{18}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}$

$dy_x=\sqrt[6]{x^5}(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})^2$

16) $y=x^3\left\{\frac{2}{11}x^2\sqrt{x}-\frac{72x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right\}$

$dy_x=\left\{\sqrt{x^3}-2\sqrt[3]{x^2}\right\}^2\left\{\sqrt{x^3}+4\sqrt[3]{x^2}\right\}$

17) $y=(6x^2-\frac{1}{5}x^5)^4$

$dy_x=4x^7(12-x^3)(6-\frac{1}{5}x^3)^3$

18) $y=\sqrt[3]{3x-2x^2}$

$dy_x=\frac{1-\frac{4}{3}x}{\sqrt[3]{(3x-2x^2)^2}}$

19) $y=\sqrt[4]{(2x^2-x^3)^3}$

$dy_x=\frac{3x-\frac{9}{4}x^2}{\sqrt[4]{2x^2-x^3}}$

20) $y=\sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x^2}$

$dy_x=\frac{1+2x\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x^2)^2}}$

21) $y=\sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$

$dy_x=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$

22) $y=\sqrt[4]{\left\{2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-x^2)}\right\}^3}$

$dy_x=\frac{\frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{x\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{(1+x)^2}\sqrt[4]{(1-x)^3}\sqrt[4]{x\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^2}}}$

23) $y=\sqrt[5]{(a+x^2)^4}\sqrt[3]{(a+x^2)^2}$

$dy_x=\frac{44}{15}x\sqrt[15]{(a+x^2)^7}$

24) $y=(5+3x)\sqrt{6x-5}$

$dy_x=\frac{27x}{\sqrt{6x-5}}$

25) $y=\sqrt{(a^2+ax+x^2)(a-x)}$

$dy_x=\frac{-\frac{3}{2}x^2}{\sqrt{(a^2+ax+x^2)(a-x)}}$

26) $y=(3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}$

$dy_x=\frac{5a^3+30ax^2+27x^3}{\sqrt{a^2+3x^2}}$

27) $y=(9a^2-6abx+5b^2x^2)\sqrt[3]{(a+bx)^2}$

$dy_x=\frac{\frac{40}{3}b^3x^2}{\sqrt[3]{a+bx}}$

28) $y=(2a+3bx)(2a-3bx)^2\sqrt{4a+6bx}$

$$dy_x=\frac{3b(9b^2x^2-4a^2)(21bx+2a)}{\sqrt{4a+6bx}}$$

29) $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$

$$dy_x=\frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

30) $y=(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}$

$$dy_x=\frac{\left\{x+\sqrt{1+x^2}\right\}^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

31) $y=\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}$

$$dy_x=\frac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

32) $y=\left\{40-12x+\frac{27}{5}x^2\right\}\sqrt{5+3x}$

$$dy_x=\frac{\frac{81}{2}x^2}{\sqrt{5+3x}}$$

33) $y=\left\{\frac{10}{3}-2x+x^2\right\}\sqrt{(5+2x)^3}$

$$dy_x=7x^2\sqrt{5+2x}$$

34) $y=(4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}$

$$dy_x=28x\sqrt[3]{3x+7}$$

35) $y=\left\{\frac{2}{3x^3}+\frac{28}{27x}\right\}\sqrt{7x^2-9}$

$$dy_x=\frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$$

36) $y=\left\{\frac{3}{x^7}+\frac{2}{x^5}\right\}\sqrt{(3-5x^2)^5}$

$$dy_x=-\frac{63}{x^8}\sqrt{(3-5x^2)^2}$$

37) $y=\left\{\frac{2}{27x}-\frac{1}{9x^2}\right\}\sqrt{3x+x^2}$

$$dy_x=\frac{1}{2x^2\sqrt{3x+x^2}}$$

38) $(8x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$

$$dy_x=\frac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}$$

39) $y=(3x^4+4)\sqrt[4]{9x^4-3}$

$$dy_x=\frac{135x^7}{\sqrt[4]{(9x^4-3)^3}}$$

40) $y=\left\{7-\frac{6}{x^2}\right\}\sqrt[7]{\left(3+\frac{6}{x^2}\right)^3}$

$$dy_x=\frac{720}{7x^5\sqrt[7]{\left(3+\frac{6}{x^2}\right)^4}}$$

41) $y=\left\{\frac{96}{77}-\frac{8}{11}\sqrt[9]{4x^5}+\frac{1}{3}x\sqrt[9]{16x}\right\}\sqrt[4]{(3+\sqrt[9]{4x^5})^7}$

$$dy_x=\frac{25}{36}\sqrt[3]{4x^2}\sqrt[4]{(3+\sqrt[9]{4x^5})^3}$$

42) $y=\frac{1}{a^2-ax+x^2}$

$$dy_x=\frac{a-2x}{(a^2-ax+x^2)^2}$$

43) $y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

$$dy_x=\frac{-2a^2x}{(a^2+x^2)^2}$$

44) $y=\frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}$

$dy_x=\frac{30(1-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}$

48) $y=x\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$

$dy_x=\frac{a^2+abx-b^2x^2}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x^2}}$

45) $y=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

$dy_x=\frac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

49) $y=\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$dy_x=\frac{\{x-\sqrt{1+x^2}\}^2}{\sqrt{1+x^2}}$

46) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$dy_x=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

50) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$dy_x=\frac{2\{\sqrt{1+x^2}+x\}^2}{\sqrt{1+x^2}}$

47) $y=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$

$dy_x=\frac{-2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$

51) $y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$dy_x=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

52) $y=\frac{5b^3x^3+30ab^2x^2+40a^2bx+16a^3}{(a+bx)^2\sqrt{a+bx}}$

$dy_x=\frac{5b^4x^3}{2(a+bx)^{7/2}}$

53) $y=\frac{\sqrt{(4x^3-5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}}$

$dy_x=\frac{\{190x^4+54x^2+100x\}\sqrt{4x^3-5}}{3\sqrt[3]{(5x^2+1)^5}}$

54) $y=\frac{2x^4}{\{9x-13\}^3\sqrt{9x^2-13x}}$

$dy_x=\frac{-91x^3}{\{9x-13\}^4\sqrt{9x^2-13x}}$

55) $y=\frac{108-18\sqrt{x}-3x-\frac{5}{6}x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}}$

$dy_x=\frac{10x}{9\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^4}}$

56) $y = \frac{\frac{9}{320}x^4 - \frac{1}{8x^2}}{\sqrt[3]{(20-3x^6)^2}}$.

$dy_x = \frac{5}{x^3\sqrt[3]{(20-3x^6)^5}}$

57) $y = \frac{\frac{3}{x^3} + 20x^3 + \frac{200}{9}x^9}{\sqrt{(3+5x^6)^3}}$

$dy_x = \frac{-27}{x^4\sqrt{(3+5x^6)^5}}$

58) $y = \left\{\sqrt{x^3} - \frac{1}{40}\right\}\sqrt[3]{(\frac{1}{4}+6\sqrt{x^3})^5}$

$dy_x = 24x^2\sqrt[3]{(\frac{1}{4}+6\sqrt{x^3})^2}$

59) $y = \frac{1}{5\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^5}} - \frac{1}{8\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^8}}$

$dy_x = \frac{x^4}{\sqrt[3]{(1+x^3)^{11}}}$

60) $y = \sqrt[3]{5+7\sqrt{x}}\left\{\frac{9(5-21\sqrt{x})}{50\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{49}(7\sqrt{x}-15)\right\}$

$dy_x = \frac{2-3x^{-5/2}}{\sqrt[3]{(5+7\sqrt{x})^2}}$

## B. Differentialquotienten transcendenter Funktionen.

### §. 3.

Unter transcendenten Funktionen werden hier die logarithmischen, die Exponential-, die goniometrischen und die cyklometrischen Funktionen verstanden. Mit dem Zeichen *log* ist stets der natürliche Logarithmus gemeint und bei den trigonometrischen Funktionen ist der Radius $=1$ angenommen. Die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist, wie gebräuchlich, durch $e$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Differentiationsvorschriften, wobei $u$ und $v$ beliebige Funktionen von $x$ bedeuten.

a) $d.(a^u)_x = a^u . \log a . du_x$; $d(e^u)_x = e^u . du_x$

b) $d.(\log u)_x = \frac{1}{u} . du_x$,

wenn man nicht natürliche Logarithmen (*logarithmi naturales*), son-

dern künstliche (*logarithmi artificiales*) für die Basis $a$ hat, so lautet dieser Satz:

$$d.(log.\ art.\ u)_x = \frac{1}{u.\,log.nat.\,a}.du_x$$

c) $d.(\sin u)_x = \cos u\,.\,du_x$

d) $d.(\cos u)_x = -\sin u\,.\,du_x$

e) $d.(tang\ u)_x = \frac{1}{\cos u^2}.du_x$

f) $d.(cotg\ u)_x = -\frac{1}{\sin u^2}.du_x$

g) $d.(\sec u)_x = \frac{\sin u}{\cos u^2}.du_x$

h) $d.(cosec\,u)_x = -\frac{\cos u}{\sin u^2}.du_x$

i) $d.(sin\,vers\,u)_x = \sin u\,.\,du_x$

k) $d.(cos\,vers\,u)_x = -\cos u\,.\,du_x$

l) $d.(arc\sin v)_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.dv_x$

m) $d.(arc\cos v)_x = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}.dv_x$

n) $d.(arc\,tang\,v)_x = \frac{1}{1+v^2}.dv_x$

o) $d.(arc\,cotg\,v)_x = \frac{-1}{1+v^2}.dv_x$

p) $d.(arc\sec v)_x = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}.dv_x$

q) $d.(arc\,cosec\,v)_x = \frac{-1}{v\sqrt{v^2-1}}.dv_x$

r) $d.(arc\,sin\,vers\,v)_x = \frac{1}{\sqrt{2v-v^2}}.dv_x$

s) $d.(arc\,cos\,vers\,v)_x = \frac{-1}{\sqrt{2v-v^2}}dv_x$

## §. 4.

### Beispiele.

1) $y = log(1+x^2)$

$dy_x = \frac{2x}{1+x^2}$

2) $y = log\frac{x}{1-x^2}$

$dy_x = \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}$

3) $y = log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$dy_x = \frac{1}{x(1+x^2)}$

4) $y = log\frac{1+x}{1-x}$

$dy_x = \frac{2}{1-x^2}$

5) $y = log(x+\sqrt{1+x^2})$

$dy_x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6) $y = log\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$

$dy_x = \frac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$

7) $y = \log\left\{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right\}$

$$dy_x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

8) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

$$dy_x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

9) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$

$$dy_x = \frac{\sqrt{21}}{7x^2-3}$$

10) $y = \log\dfrac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7}$

$$dy_x = \frac{12}{x(6+7x+2x^2)}$$

11) $y = \log\dfrac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\,\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$

$$dy_x = \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2-11x-12}$$

12) $y = \log\left\{\dfrac{\sqrt[6]{(x^2+3x-7)^{17}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\sqrt[6\sqrt{37}]{\left(\dfrac{2x+3+\sqrt{37}}{2x+3-\sqrt{37}}\right)^{29}}\right\}$

$$dy_x = \frac{5x^2-4x+1}{x^3+2x^2-10x+7}$$

13) $y = \dfrac{x^3-\frac{96}{25}x+\frac{288}{125}}{(4-5x)^2}+\frac{12}{125}\log(4-5x)$

$$dy_x = \frac{5x^3}{(5x-4)^3}$$

14) $y = \dfrac{\left\{\frac{1}{x}+\frac{125}{12}+\frac{65}{3}x+\frac{35}{2}x^2+5x^3\right\}}{(1+x)^4}+5\log\left\{\dfrac{x}{1+x}\right\}$

$$dy_x = \frac{-1}{x^2(1+x)^5}$$

15) $y = \dfrac{245x-18}{294(3-7x^2)}+\dfrac{5}{6\sqrt{21}}\log\left\{\dfrac{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}{\sqrt{3}-7x^2}\right\}-\frac{1}{49}\log(3-7x^2)$

$$dy_x = \frac{5-2x^3}{(3-7x^2)^2}$$

16) $y = \left\{\dfrac{1}{5x^2}-\dfrac{5}{12}+\dfrac{13x^2}{75}-\dfrac{7x^4}{250}+\dfrac{x^6}{625}\right\}\dfrac{1}{(x^2-5)^4}-\dfrac{1}{3125}\log\left\{\dfrac{x^2}{x^2-5}\right\}$

$$dy_x = \frac{2}{x^3(x^2-5)^5}$$

17) $y = \{\log u\}^n$

$dy_x = n\{\log u\}^{n-1} . \frac{1}{u} . du_x$

18) $y = ax^m \log(bx^n)$

$dy_x = ax^{m-1}\{m \log(bx^n) + n\}$

19) $y = ax^m\{\log(bx^n)\}^p$

$dy_x = ax^{m-1}\{\log(bx^n)\}^{p-1} . \{m \log(bx^n) + pn\}$

20) $y = \frac{x^2(x^3-4)}{\sqrt[3]{(\log 2x)^2}}$

$dy_x = \frac{x(5x^3-8) . \log 2x - \frac{4}{3}x(x^3-4)}{\sqrt[3]{(\log 2x)^5}}$

21) $y = e^x . x^n$

$dy_x = e^x(nx^{n-1} + x^n)$

22) $y = a^{2x^3-3x^2}$

$dy_x = 6x(x-1)a^{2x^3-3x^2} \log a$

23) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

$dy_x = x^3 . e^x$

24) $y = x^x$

$dy_x = x^x(1 + \log x)$

25) $y = (4x + 5x^3)^{3x^2-2x}$

$dy_x = (4x+5x^3)^{3x^2-2x}\left\{\frac{(3x-2)(4+15x)}{4+5x^2} + (6x-2)\log(4x+5x^3)\right\}$

26) $y = \log\{(3x-7x^3)^{5x-2}\}$

$dy_x = \frac{(5x-2)(3-21x^2)}{3x-7x^3} + 5\log(3x-7x^3)$

27) $y = \log(\log u)$

$dy_x = \frac{1}{u \log u} . du_x$

28) $y = (4x-3)\log\left\{\frac{3}{x} + 4x + \log\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}$

$dy_x = 4\log\left\{\frac{3}{x} + 4x + \log\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\} + \frac{16x^4 - 18x^2 + 9}{x(x+1)\left\{3 + 4x + x\log\left(\frac{4x-3}{x^2+x}\right)\right\}}$

29) $y = u^v$

$dy_x = u^v . \log u . dv_x + v . u^{v-1} . du_x$

30) $y = \log(u^v)$

$dy_x = \log u \,.\, dv^x + \frac{v}{u} \,.\, du_x$

31) $y = (\log u)^v$

$dy_x = \frac{v}{u} \,.\, (\log u)^{v-1} \,.\, du_x$

32) $y = u^{v^w}$

$dy_x = u^{v^w} \,.\, v^w \,.\, \log u \left\{ \log v \,.\, dw_x + \frac{w}{v} \,.\, dv_x + \frac{1}{u \log u} \,.\, du_x \right\}$ .

33) $y = \sin x^n$

$dy_x = n \sin x^{n-1} \,.\, \cos x$

34) $y = \sin m x$

$dy_x = m \,.\, \cos m x$ .

35) $y = \sin(px + q)$

$dy_x = p \,.\, \cos(px + q)$

36) $y = \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{3}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x - 5 \sin x$

$dy_x = -64 \sin x^2 \cos x^5$

37) $y = \frac{1}{8} \sin 8x + \frac{2}{3} \sin 6x + \sin 4x - 2 \sin 2x - 5x$

$dy_x = -128 \sin x^2 \cos x^6$

38) $y = \frac{1}{9} \cos 9x + \frac{3}{7} \cos 7x - \frac{8}{3} \cos 3x - 6 \cos x$

$dy_x = 256 \sin x^3 \cos x^6$

39) $y = \frac{1}{10} \cos 10x + \frac{1}{2} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 6x - 2 \cos 4x - 7 \cos 2x$

$dy_x = 512 \sin x^3 \cos x^7$

40) $y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x$

$dy_x = x^3 \,.\, \cos x$

41) $y = \tan g\, x + \frac{1}{3} \tan g\, x^3$

$dy_x = \frac{1}{\cos x^4}$

43) $y = \tan g\, x - \cot g\, x - 2x$

$dy_x = \tan g\, x^2 + \cot g\, x^2$

42) $y = \left( \frac{2}{\cos x^4} + \frac{3}{\cos x^2} \right) \sin x$

$dy_x = \frac{8 - 3 \cos x^4}{\cos x^5}$

44) $y = \left\{ \cos x^2 + \frac{2}{3} \right\} \sin x^3$

$dy_x = 5 \sin x^2 \cos x^3$

45) $y = \frac{1}{3} \cos x \cot g\, x - \frac{1}{6} \cos 2x \sin x - \frac{3}{2} \sin x - \frac{4}{3} \operatorname{cosec} x$

$dy_x = \frac{\cos x^6}{\sin x^2}$

46) $y = \frac{15}{8} x + \cot g\, x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 4x$

$dx_x = -\frac{\cos x^6}{\sin x^2}$

47) $y = \frac{3\,cosec\,x - 2\sin x}{5\cos x^5} - \frac{16}{5}\,cotg\,2x$

$dy_x = \frac{\sec x^2 .\,cosec\,x^2}{\cos x^2}$

48) $y = -\frac{1}{2\sin x^2} + \log tang\,x$

$dy_x = \frac{1}{\sin x^3 \cos x}$

49) $y = -\frac{1}{3\sin x^3} - \frac{1}{\sin x} + \log tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right)$

$dy_x = \frac{1}{\sin x^4 \cos x} = \frac{tang\,x}{\sin x^5}$

50) $y = \frac{1}{3}\cos x^3 + \cos x + \log tang\,\frac{1}{2}x$

$dy_x = \cos x^3 .\,cotg\,x$

51) $y = 1 + \frac{1}{2}\,cosec\,x^2 + \cos x^2 - \frac{1}{4}\cos x^4 + 3\log\sin x$

$dy_x = -\frac{\cos x^7}{\sin x^3}$

52) $y = \frac{1}{5}\sin x^2 \cos x^3 - \frac{13}{15}\cos x^3 - 3\cos x - \frac{1}{2}\,cotg\,x\,cosec\,x - \frac{7}{2}\log tang\,\frac{1}{2}x$

$dy_x = \frac{\cos x^8}{\sin x^3}$

53) $y = \frac{1}{4}\,tang\,x^4 - \frac{1}{2}\,tang\,x^2 - \log\cos x$

$dy_x = tang\,x^5$

54) $y = -\frac{1}{4}\,cotg\,x^4 + \frac{1}{2}\,cotg\,x^2 + \log\sin x$

$dy_x = cotg\,x^5$

55) $y = \frac{1}{6}\,tang\,x^6 - \frac{1}{4}\,tang\,x^4 + \frac{1}{2}\,tang\,x^2 + \log\cos x$

$dy_x = tang\,x^7$

56) $y = \frac{23 + 18\cos 2x + 3\cos 4x}{48\cos x^6} + \log tang\,x$

$dy_x = \frac{\sec x .\,cosec\,x}{\cos x^6}$

57) $y = \frac{(3\cos 4x - 7)\,cotg\,2x}{\sin^4 2x} + 6 .\log tang\,x$

$dy_x = \sec x^5 .\,cosec\,x^5$

58) $y = \frac{\left(-\frac{149}{6} + \frac{80}{3}\cos 4x - \frac{5}{2}\cos 8x\right)\,cotg\,2x}{\sin^5 2x} + 20\log tang\,x$

$dy_x = \sec x^7 .\,cosec\,x^7$

59) $y = \sin(m + nx)$

$dy_x = n . \cos(m + nx)$

60) $y = tang^2(p + qx)$

$dy_x = \frac{2q\, tang(p + qx)}{\cos^2(p + qx)}$

61) $y = x^2 . \sec(px + qx^3)$

$dy_x = \frac{2x + x^2(p + 3qx^2)\, tang(px + qx^3)}{\cos(px + qx^3)}$

62) $y = \frac{\sin x}{a + b\cos x}$

$dy_x = \frac{a\cos x + b}{(a + b\cos x)^2}$

63) $y = \frac{\sin x^2}{a + b\cos x^2}$

$dy_x = \frac{(a + b)\sin 2x}{(a + b\cos x^2)^2}$

64) $y = \log\left\{\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2} . \sin x}{a + b\cos x}\right\}$

$dy_x = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b\cos x}$

65) $y = e^{ax}(a\sin x - \cos x)$

$dy_x = (a^2 + 1)\, e^{ax} . \sin x$

66) $y = e^{ax}(a\cos x + \sin x)$

$dy_x = (a^2 + 1)\, e^{ax} \cos x$

67) $y = a\, e^{ax} \sin x\, (a\sin x - 2\cos x) + 2\, e^{ax}$

$dy_x = a\,(a^2 + 4)\, e^{ax} \sin x^2$

68) $y = e^{ax} \cos x^2 (a\cos x + 3\sin x) + \frac{6\, e^{ax}(a\cos x + \sin x)}{a^2 + 1}$

$dy_x = (a^2 + 9)\, e^{ax} \cos x^3$

69) $y = e^{3x}(3\sin x - \cos x)$

$dy_x = 10\, e^{3x} . \sin x$

70) $y = \log\left\{\frac{e^x\sqrt{\cos x - e^{\sin x}} + e^{-x}\sqrt{\cos x + e^{\sin x}}}{e^x\sqrt{\cos x - e^{\sin x}} - e^{-x}\sqrt{\cos x + e^{\sin x}}}\right\}$

$dy_x = \frac{2\, e^{\sin x}(\cos x^2 + \sin x) - 2(\cos x^2 - e^{2\sin x})}{\left\{\cos x\,(e^{2x} - e^{-2x}) - e^{\sin x}(e^{2x} + e^{-2x})\right\}\sqrt{\cos x^2 - e^{2\sin x}}}$

71) $y = arc(\sin = \sqrt{x^3})$

$dy_x = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^3}}$

73) $y = arc\left(\sin = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\right)$

$dy_x = -\frac{1}{(1 + x)\sqrt{2x}\,(1 - x)}$

72) $y = arc(\sin = 2x\sqrt{1 - x^2})$

$dy_x = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

74) $y = arc\left(\sin = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$

$dy_x = -\frac{2}{1 + x^2}$

75) $y = x^3 arc\left(sin = \frac{1}{x}\right)$

$dy_x = 3x^2 . arc\left(sin = \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

76) $y = arc\left(sin = \frac{bx-a}{x\sqrt{b^2+a}}\right)$

$dy_x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x^2+2bx-a}}$

77) $y = arc\left(sin = \sqrt{\frac{a+bx^2}{a+1+bx^2}}\right)$

$dy_x = \frac{bx}{(a+1+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$

78) $y = arc\left(tang = \frac{2x}{1-x^2}\right)$

$dy_x = \frac{2}{2(1+x^2)}$

79) $y = arc\left(tang = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

$dy_x = \frac{1}{2(1+x^2)}$

80) $y = arc\left(tang = \frac{2x+1}{x\sqrt{3}}\right)$

$dy_x = -\frac{\sqrt{3}}{7x^2+4x+1}$

81) $y = arc\left(tang = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$dy_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

82) $y = arc\left(tang = \frac{2x-1}{2\sqrt{1+x-x^2}}\right)$

$dy_x = \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}$

83) $y = arc\left(tang = \frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}\right)$

$dy_x = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

84) $y = arc\left(sec = \frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

$dy_x = \frac{2}{1+x^2}$

85) $y = arc\left(sec = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$dy_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

86) $y = arc\left(sec = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

$dy_x = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

87) $y = arc\left(sec = \frac{x\sqrt{5}}{x\sqrt{x^2+x-1}}\right)$

$dy_x = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

88) $y = \sqrt{1-x^2} - x . arc(sin = \sqrt{1-x^2})$

$dy_x = - arc(sin = \sqrt{1-x^2})$

89) $y = (1 - \frac{1}{3}x^2)x . arc(sin = \sqrt{1-x^2}) - \frac{1}{9}(7-x^2)\sqrt{1-x^2})$

$dy_x = (1-x^2)\, arc(sin = \sqrt{1-x^2})$

90) $y = \frac{1}{4}x^2 - \left\{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} arc(sin = x)\right\} . arc(sin = x)$

$dy_x = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} . arc(sin = x)$

91) $y = \left\{ -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{16} arc(sin = x)\right\} . arc(sin = x)$
$+ \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2$

$dy_x = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} . arc(sin = x)$

92) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} . arc(sin = x) + \frac{1}{2} log(1 - x^2)$

$dy_x = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} . arc(sin = x)$

93) $y = \frac{1}{x} arc(sin = \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$

$dy_x = -\frac{1}{x^2} . arc(sin = \sqrt{1-x^2})$

94) $y = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}) arc(cos = x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$
$dy_x = x . arc(cos = x)$

95) $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - (1 - \frac{1}{2}x^2) arc(tang = \sqrt{1-x^2})$
$dy_x = x . arc(tang = \sqrt{1-x^2})$

96) $y = \frac{1}{5}x^5 arc(tang = x) - \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10} log(1 + x^2)$
$dy_x = x^4 arc(tang = x)$

97) $y = \left\{x - \frac{1}{2} arc(tang = x)\right\} . arc(tang = x) - \frac{1}{2} log(1 + x^2)$

$dy_x = \frac{x^2}{1+x^2} arc(tang = x)$

98) $y = \left\{\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} arc(tang = x)\right\} . arc(tang = x) + \frac{1}{4(1+x^2)}$

$dy_x = \frac{1}{(1+x^2)^2} . arc(tang = x)$

99) $y = \left\{\frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{2} arc\left(tang = \frac{2x}{1-x^2}\right)\right\} . arc\left(tang = \frac{2x}{1-x^2}\right) - log\frac{1+x^2}{1-x^2}$

$dy_x = \frac{16x^2}{(1-x^4)(1-x^2)} . arc(tang = x)$

100) $y = r . arc\left(sinvers = \frac{x}{r}\right) + \sqrt{2rx - x^2}$

$dy_x = \sqrt{\frac{2r - x}{x}}$

$$101)\quad y = \left\{ arc\left( tang = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) \right\}^{arc\left( tang = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)}$$

$$dy_x = \left\{ \tfrac{1}{2}\, arc\,(tang = x) \right\}^{\frac{1}{2} arc\,(tang = x)} \left\{ \frac{1 - log 2 + log\, arc(tang = x)}{2(1+x^2)} \right\}$$

$$102)\quad y = \frac{-\sin x}{2+\cos x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\, arc\left( \cos = \frac{1+2\cos x}{2+\cos x} \right)$$

$$dy_x = \frac{3}{(2+\cos x)^2}$$

$$103)\quad y = arc\left( tang = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\; tang\, \tfrac{1}{2} x \right)$$

$$dy_x = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$$

$$104)\quad y = -\frac{1}{2p}\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) arc\left( tang = \frac{2p \sin x}{(m+n) + (m-n)\cos x} \right)$$
$$+ \frac{1}{2q}\left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) arc\left( tang = \frac{2q \sin x}{(m-n) + (m+n)\cos x} \right)$$

$$dy_x = \frac{1}{a + b\cos x + c\cos 2x}$$

$$105)\quad y = \frac{1}{2p}\left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) arc\left( tang = \frac{2p \sin x}{(m+n) + (m+n)\cos x} \right)$$
$$- \frac{1}{2q}\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) arc\left( tang = \frac{2q \sin x}{(m-n) + (m+n)\cos x} \right)$$

$$dy_x = \frac{\cos x}{a + b\cos x + c\cos 2x}$$

In diesen beiden letzten Formeln ist $m^2 = a+b+c$; $n^2 = a-b+c$; $p^2 = \frac{1}{4}(m-n)^2 - 2c$; $q^2 = \frac{1}{4}(m+n)^2 - 2c$.

---

## II. Independente Darstellung der Differentialquotienten höherer Ordnung von Funktionen einer Variabele.

### §. 5.

Für die Summen und Differenzen von Funktionen ergibt es sich unmittelbar, dass ihre Differentialquotienten höherer Ordnung gleich

der Summe oder Differenz der Differentialquotienten derselben Ordnung der einzelnen Summanden sein müssen; für das Product zweier Funktionen hat man folgende Regel:

a) $$\frac{d^n\{\varphi(x).\psi(x)\}}{dx^n}=\varphi(x).\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}+n_1.\frac{d\varphi(x)}{dx}.\frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}$$
$$+n_2.\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}.\frac{d^{n-2}\varphi(x)}{dx^{n-2}}\ldots\ldots$$
$$+n_1.\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}}.\frac{d\psi(x)}{dx}+\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}.\psi(x)$$
$$=\sum_{k=o}^{k=n} n_k\,\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}.\frac{d^{n-k}\psi(x)}{dx^{n-k}}.$$

Hier bedeutet für den Fall $k=o$, der nullte Differentialquotient von $\varphi(x)$ die Function $\varphi(x)$ selbst.

Wenn man eine Function $f(z)$ von einer andern Function $z=\varphi(x)$ hat, so wird, wenn zunächst $\varphi(x)$ eine lineäre Function bedeutet, also $z=\alpha+\beta x$ ist, ziemlich einfach

$$\frac{df(z)}{dx}=f'(z).\frac{dz}{dx}=\beta.f'(z)$$
$$\frac{d^2f(z)}{dx^2}=\beta^2f''(z)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^nf(z)}{dx^n}=\beta^nf^{(n)}(z).$$

Ist dagegen $\varphi$ irgend eine andere Function, so wird allgemein:

$$\frac{df(z)}{dx}=f'(z).\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d^2f(z)}{dx^2}=f'(z).\frac{d^2z}{dx^2}+f''(z).\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$
$$\frac{d^3f(z)}{dx^3}=f'(z).\frac{d^3z}{dx^3}+3f''(z).\frac{dz}{dx}.\frac{d^2z}{dx^2}+f'''(z).\left(\frac{dz}{dx}\right)^3$$
$$\frac{d^4f(z)}{dx^4}=f'(z).\frac{d^4z}{dx^4}+f''(z)\left\{\frac{d^4z}{dx^4}+3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+3\,\frac{dz}{dx}.\frac{d^3z}{dx^3}\right\}$$
$$+6f'''(z).\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.\frac{d^2z}{dx^2}+f^{IV}(z).\left(\frac{dz}{dx}\right)^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und im Allgemeinen

$$\frac{d^n f(z)}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) . \overset{n}{u}_k$$

wobei $f^k(z)$ nach der gewöhnlichen *Lagrange*'schen Bezeichnungsweise den $k$-ten Differentialquotienten der Function $f(z)$, und zwar, was wol zu beachten, in Bezug auf die Variable $z$ und nicht in Bezug auf $x$ bedeutet, $\overset{n}{u}_k$ dagegen eine Function von $z$ (oder implicite von $x$), von $k$ und von $n$ ist, die aber, was als wesentlicher Umstand betrachtet werden muss, von der Natur der Function $f$ vollkommen unabhängig bleibt. Ist man also im Stande, bei einer willkürlich angenommenen speciellen Function $f$, den Coefficienten $u$ zu bestimmen, so wird er allgemeine Giltigkeit haben. Setzt man z. B. $f(z) = z^h$, so wird $f^k(z) = \frac{d^k(z^h)}{d z^k} = h(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1) . z^{h-k}$

$$= 1.2.3\ldots.k.h_k.z^{h-k}$$

wenn $h_k$ wie gewöhnlich den $k$ten Binomialcoefficienten der $h$ten Potenz bedeutet. Dann wird aber die obige Gleichung

$$\frac{d^n(z^h)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} 1.2.3\ldots k.h_k.z^{h-k}.\overset{n}{u}_k.$$

Dividirt man hier durch $z^h$ und beachtet, dass $h_k$ für $k > h$ verschwindet, so ist

$$z^{-h}.\frac{d^n(z^h)}{dx_n} = \sum_{k=1}^{k=h} 1.2.3\ldots.k.h_k.z^{-k}.\overset{n}{u}_k.$$

Setzt man für einen Augenblick der Kürze wegen

$$z^{-h}.\frac{d^n(z^h)}{dx^n} = \overset{n}{w}_h$$

$$1.2.3\ldots k.z^{-k}.\overset{n}{u}_k = \overset{n}{v}_k$$

so giebt die Gleichung

$$\overset{n}{w}_h = \sum_{k=1}^{k=h} h_k \overset{n}{v}_k$$

wenn man darin, der Reihe nach, $h = 1, 2, 3, \ldots . k$ einsetzt

$$\overset{n}{w}_1 = \overset{n}{v}_1$$

$$\overset{n}{w}_2 = 2\overset{n}{v}_1 + \overset{n}{v}_2$$

$$\overset{n}{w}_3 = 3\overset{n}{v}_1 + 3\overset{n}{v}_2 + \overset{n}{v}_3$$

$$\overset{n}{w}_4 = 4\overset{n}{v}_1 + 6\overset{n}{v}_2 + 4\overset{n}{v}_3 + \overset{n}{v}_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{w}_k = k_1 \overset{n}{v}_1 + k_2 \overset{n}{v}_2 + k_3 \overset{n}{v}_3 \ldots . \overset{n}{v}_k$$

oder nach einfacher Ueberlegung rückwärts:

$$\overset{n}{v}_1 = \overset{n}{w}_1$$

$$\overset{n}{v}_2 = -2\overset{n}{w}_1 + \overset{n}{w}_2$$

$$\overset{n}{v}_3 = 3\overset{n}{w}_1 - 3\overset{n}{w}_2 + \overset{n}{w}_3$$

$$\overset{n}{v}_4 = -4\overset{n}{w}_1 + 6\overset{n}{w}_2 - 4\overset{n}{w}_3 + \overset{n}{w}_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{v}_k = (-1)^{k-1} k_1 \overset{n}{w}_1 + (-1)^{n-2} k_2 \overset{n}{w}_2 + \ldots . + \overset{n}{w}_k$$

$$= \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} . k_h . \overset{n}{w}_h$$

Setzt man statt der, der Kürze wegen eingeführten Zeichen $v$ und $w$ ihre Werthe, so wird

$$\overset{n}{u}_k = \frac{z^k}{1.2.3 \ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} . k_h . z^{-h} . \frac{d^n (z^h)}{dx^n}$$

und mit Hilfe dieses alsdann:

$$\text{b)} \quad \frac{d^n f(z)}{dx_n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{z^k}{1.2.3 \ldots k} . f^k(z) . \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} . k_h . z^{-h} . \frac{d^n . z^h}{dx_n} .$$

Eine in vielen Fällen brauchbarere Gestalt dieser Formel erhält man dadurch, dass man beachtet, es sei

$$\left(\frac{z}{\gamma}-1\right)^k=(-1)^k\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)^k$$

$$=(-1)^k\sum_{h=o}^{h=k}(-1)^h k_h \gamma^{-h} z^h$$

mithin

$$\frac{d^n\left(\frac{z}{\gamma}-1\right)^k}{dx^n}=(-1)^k\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h k_h \gamma^{-h}\frac{d^n . z^h}{dx^n},$$

oder wenn man nach der Differentiation $\gamma=z$ setzt

$$\frac{d^n\left(\frac{z}{\gamma}-1\right)^k}{dx_n}\Big\{\gamma=z\Big\}=(-1)^k\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h k_h z^{-h}\frac{d^n . z^h}{dx^n},$$

wodurch die Gleichung $b$) in folgende übergeht:

$$\text{c)}\quad \frac{d^n f(z)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{z^k}{1.2.3\ldots k}f^k(z).\frac{d^n\left(\frac{z}{\gamma}-1\right)^k}{dx^n}\Big\{\gamma=z\Big\};$$

Die am Ende beigefügte Marke soll anzeigen, dass in $\frac{d^n\left(\frac{z}{\gamma}-1\right)^k}{dx^n}$ nach der Differentiation $\gamma=z$ zu setzen ist.

Bei dieser ganzen Entwickelungsweise ist es von besonderer Wichtigkeit, sich an die Bedeutung des Summenzeichens zu gewöhnen und gewisser Maassen damit rechnen zu lernen. Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn das allgemeine Glied einer Summe zu seinem Factor wieder eine Summe hat, d. h. wenn es sich um eine sogenannte Doppelsumme handelt. Die allgemeine Form einer solchen Doppelsumme ist

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k . \sum_{h=c_k}^{h=d_k} v_h$$

worin die Indices der involvirten Summe Functionen der Indices der involvirenden Summe sein können. Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Funktion $u_k$ ohne Beeinträchtigung des Gesammtwerthes auch hin-

ter das zweite Summenzeichen gesetzt und dann mit der hier stehenden Function $\overset{k}{v}_h$ vereinigt gedacht werden kann. Wird diese Vereinigung durch $\overset{k}{w}_h$ bezeichnet, so nimmt obige Doppelsumme folgende Form an:

$$\sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c_k}^{h=d_k} \overset{k}{w}_h .$$

Eine sehr einflussreiche und praktisch nützliche Umformung, die man mit einem solchen Ausdruck vornehmen kann, besteht darin, dass die Summenzeichen, bezüglich auf ihre verschiedene Indices nach gewissen Regeln vertauscht werden können.

Sind zunächst die Indices beider Summenzeichen constante Zahlen, haben also bei der obigen Bezeichnung nicht allein $a$ und $b$, sondern auch $c_k$ und $d_k$ bestimmte Zahlenwerthe, so dass man letztere mit $c$ und $d$ ohne Weiteres bezeichnen kann, so darf man die Summenzeichen geradezu vertauschen, wodurch man den Satz erhält:

$$\text{d)} \quad \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=d} \overset{k}{w}_h = \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=b} \overset{k}{w}_h$$

Sind dagegen die Grenzen des Index der involvirten Summe, entweder beide, oder einer von beiden, Functionen des Index der involvirenden Summe, so muss man besondere Untersuchung über die Bestimmung der Grenzen bei der Vertauschung der Summenzeichen anstellen. Um nicht zu weit in ein nicht hierher gehöriges Detail einzugehn, mögen hier die beiden am häufigsten und im Folgenden allein vorkommenden Fälle angeführt werden. Sie sind:

$$\text{e)} \quad \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=dk+g} \overset{k}{w}_h = \sum_{h=c}^{h=db+g} \sum_{k \geqq \frac{h-g}{d}}^{k=b} \overset{k}{w}_h$$

$$\text{und f)} \quad \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=ck+f}^{h=d} = \sum_{h=ca+f}^{h=d} \sum_{k=a}^{k \leqq \frac{h-f}{c}} \overset{k}{w}_h$$

Hierbei ist unter dem doppelten Zeichen $k \overline{\overline{>}} \frac{h-g}{d}$ und $k \overline{\overline{<}} \frac{h-f}{c}$ dieses zu verstehn, dass wenn diese Grössen Brüche ergeben sollten, im ersten Fall die nächst grössere und im zweiten Fall die nächst kleinere **ganze** Zahl (die Null mit einbegriffen) zu nehmen ist.

## §. 6.

### Beispiele.

1) $y = x^\mu$

$$\frac{d \,.\, x^\mu}{dx} = \mu x^{\mu - 1}$$

$$\frac{d^2 \,.\, x^\mu}{dx^2} = \mu\,(\mu - 1)\,.\, x^{\mu - 2}$$

$$\frac{d^3 \,.\, x^\mu}{dx^3} = \mu\,(\mu - 1)\,(\mu - 2)\,.\, x^{\mu - 3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n \,.\, x^\mu}{dx^n} = \mu\,(\mu - 1)\,(\mu - 2) \ldots . (\mu - n + 1)\,.\, x^{\mu - n}$$

2) $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{d\,.\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^2\,.\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^2} = \frac{1\,.\,2}{x^3}$$

$$\frac{d^3\,.\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^3} = -\frac{1\,.\,2\,.\,3}{x^4}$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n\,.\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n\,.\,\frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}{x^{n+1}}$$

3) $y=\frac{1}{x^\mu}$

$$\frac{d.\left(\frac{1}{x^\mu}\right)}{dx}=-\frac{\mu}{x^{\mu+1}}$$

$$\frac{d^2.\left(\frac{1}{x^\mu}\right)}{dx^2}=\frac{\mu(\mu+1)}{x^{\mu+2}}$$

$$\frac{d^3.\left(\frac{1}{x^\mu}\right)}{dx^3}=-\frac{\mu\,(\mu+1)\,(\mu+2)}{x^{\mu+3}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n.\left(\frac{1}{x^\mu}\right)}{dx^n}=(-1)^n.\frac{\mu\,(\mu+1)\,(\mu+2)\ldots.(\mu+n-1)}{x^{\mu+n}}$$

4) $y=\sqrt{x}$

$$\frac{d.(\sqrt{x})}{dx}=\frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\frac{d^2.(\sqrt{x})}{dx}=-\frac{1.\sqrt{x}}{2^2x^2}$$

$$\frac{d^3.(\sqrt{x})}{dx^3}=\frac{1.3.\sqrt{x}}{2^3x^3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n.(\sqrt{x})}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)\,(2n-1).\sqrt{x}}{(2n-1)\,2^n.x^n}$$

(Der Factor $(2n-1)$ ist im Zähler und Nenner hinzugefügt, damit die Formel auch für den ersten Differentialquotienten, für $n=1$, ihre Anwendung finde.)

5) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{d.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx}=-\frac{1}{2.x\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^2}=\frac{1.3}{2^2.x^2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^3.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^3}=-\frac{1.3.5}{2^3.x^3\sqrt{x}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^n}=(-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.x^n\sqrt{x}}$$

6) $y=\sqrt[3]{x}$

$$\frac{d.(\sqrt[3]{x})}{dx}=\frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^2.(\sqrt[3]{x})}{dx^2}=-\frac{1.2}{3^2.x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^3.(\sqrt[3]{x})}{dx^3}=\frac{1.2.5}{3^3.x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^4.(\sqrt[3]{x})}{dx^4}=-\frac{1.2.5.8}{3^4.x^3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^5.(\sqrt[3]{x})}{dx^5}=\frac{1.2.5.8.11}{3^5.x^4\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^6.(\sqrt[3]{x})}{dx^6}=-\frac{1.2.5.8.11.14}{3^6.x^5\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{d^7.(\sqrt[3]{x})}{dx^7}=\frac{1.2.5.8.11.14.17}{3^7.x^6\sqrt[3]{x^2}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n.(\sqrt[3]{x})}{dx^n}=(-1)^{n-1}.\frac{1.2.5.8.11\ldots(3n-7)(3n-4)(3n-1).\sqrt[3]{x}}{(3n-1).3^n.x^n}$$

(Wegen des Factors $(3n-1)$ siehe die Bemerkung bei Aufgabe 4.)

7) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$$\frac{d\,.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx} = -\frac{1}{3\,x\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{d^2.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx^2} = \frac{1.4}{3^2\,x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{d^3.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx^3} = -\frac{1.4.7}{3^3\,x^3\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{d^4.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx^4} = \frac{1.4.7.10}{3^4\,x^4\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{d^5.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx^5} = -\frac{1.4.7.10.13}{3^5\,x^5\sqrt[3]{x}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{dx^n} = (-1)^n.\frac{1.4.7.10\ldots.(3n-8)\,(3n-5)\,(3n-2)}{3^n\,x^n\sqrt[3]{x}}$$

8) $y = \sqrt[3]{x^2}$

$$\frac{d^n.(\sqrt[3]{x^2})}{dx^n} = (-1)^{n-1}2.\frac{1.4.7.10\ldots.(3n-5)(3n-2)\sqrt[3]{x^2}}{(3n-2).3^n\,x^n}$$

(Wegen des Factors $(3n-2)$ siehe die Bemerkung bei Aufgabe 4.)

9) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\frac{d^n.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}{dx^n} = (-1)^{n-1}.\frac{2.5.8.11\ldots.(3n-1)}{3^n\,x^n\sqrt[3]{x^2}}$$

10) $y = (a \pm bx)^\mu$

$$\frac{d^n.(a\pm bx)^\mu}{dx^n} = (\pm b)^n.\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1).(a\pm bx)^{\mu-1}$$
$$= (\pm b)^n.1.2.3\ldots.n.p_n\,(a\pm bx)^{\mu-1}$$

11) $y=\frac{1}{a\pm bx}$

$$\frac{d^n.\left(\frac{1}{a\pm bx}\right)}{dx^n}=(\mp b)^n\frac{1.2.3.4\ldots n}{(a\pm bx)^{n+1}}$$

12) $y=\frac{x}{a\pm bx}$

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a\pm bx}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots n.a.(\mp b)^{n+1}}{(a\pm bx)^{n+1}}$$

13) $y=\frac{1}{\sqrt{a\pm bx}}$

$$\frac{d^n.\left(\frac{1}{\sqrt{a\pm bx}}\right)}{dx^n}=(\mp b)^n.\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2^n(a\pm bx)^n\sqrt{a\pm bx}}$$

14) $y=\sqrt{(a\pm bx)^\mu}$

Wenn $p$ die grösste in $\frac{1}{2}\mu$ enthaltene ganze Zahl und $n\overline{\overline{<}}p+1$ ist, so ergibt sich der $n$te Differentialquotient unmittelbar aus 10); ist dagegen $n>p+1$, so wird:

$$\frac{d^n.(\sqrt{(a\pm bx)^\mu})}{dx^n}=(-1)^{n-p-1}(\pm b)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-2p-3).\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots.(\mu-2p)}{2^n(a\pm bx)^{n-p-1}\sqrt{a\pm bx}}$$

15) $y=x\sqrt{(a\pm bx)^\mu}$

Mit Berücksichtigung von II. §. 5. a wird:

$$d^n\left\{x\sqrt{(a\pm bx)^\mu}\right\}_{x^n}=\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n+4)(\pm b)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

$$.\left\{na\pm\left(\frac{\mu}{2}+1\right)bx\right\}.(a\pm bx)^{\mu-n}$$

16) $y=\frac{1}{a^2-b^2x^2}$

$$\frac{d\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx}=\frac{2b^2x}{(a^2-b^2x^2)^2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^2}=\frac{2b^2(a^2+3b^2x^2)}{(a^2-b^2x^2)^3}$$

$$\frac{d^3\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^3}=\frac{2.3.b^4(4a^2x+4b^2x^3)}{(a^2-b^2x^2)^4}$$

$$\frac{d^4\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^4}=\frac{2.3.4.b^4(a^4+10a^2b^2x^2+5b^4x^4)}{(a^2-b^2x^2)^5}$$

$$\frac{d^5\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^5}=\frac{2.3.4.5b^6(6a^4x+20a^2b^2x^3+6b^4x^5)}{(a^2-b^2x^2)^6}$$

$$\frac{d^6\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{2.3\,4.5.6.b^6(a^6+21a^4b^2x^2+35a^2b^4x^4+7b^6x^6)}{(a^2-b^2x^2)^7}$$

$$\frac{d^7\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^7}=\frac{2.3.4.5.6.7b^8(8a^6x+56a^4b^2x^3+56a^2b^4x^5+8b^6x^7)}{(a^2-b^2x^2)^8}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Um den allgemeinen independenten Ausdruck für den $n$ten Differentialquotienten zu erhalten, beachte man, dass

$$\frac{1}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a-bx}=\frac{1}{a+bx}\right\}$$

ist, dann erhält man mit Hilfe der Aufgabe 11)

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots.n.b^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a-bx)^{n+1}}+(-1^n\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}\right\}$$

$$=(-1)^n\frac{1.2.3\ldots n.b^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}-\frac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\}.$$

Unterscheidet man hier noch die beiden Fälle, dass das $n$ eine gerade oder ungerade Zahl ist und bezeichnet man, wie gewöhnlich, durch $s_p$ den $p$ten Binomialcoefficienten der $s$ten Potenz, so wird für ein gerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots.n.b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\cdot\left\{a^n+(n+1)_2a^{n-2}b^2x^2\right.$$

$$\left.+(n+1)_4a^{n-4}b^4x^4+\ldots+(n+1)_1b^nx^n\right\}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots n.b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\cdot\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}n}(n+1)_{2h}a^{n-2h}b^{2h}x^{2h};$$

und für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots n\,b^{n+1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\cdot\Big\{(n+1)_1\,a^{n-1}x+(n+1)_3a^{n-3}b^2x^3+\ldots+(n+1)_1\,a\,b^{n-1}\,x^n\Big\}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots n.b^{n+1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\cdot\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}(n-1)}(n+1)_{2h+1}a^{n-2h-1}b^{2h}x^{2h+1}.$$

oder auch wenn man nach absteigenden Potenzen von $x$ ordnet, für beide Fälle, sowohl für ein gerades als auch für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots n.b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\cdot\sum_{h=0}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n}(n+1)_{2h+1}\,a^{2h}\,b^{n-2h}\,x^{n-2h},$$

wobei wegen der doppelten Summengrenze $h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n$ die in diesem Abschnitt II. §. 5 bei Lit. $e$ und $f$ gemachte Bemerkung zu beachten ist.

17) $y=\frac{x}{a^2-b^2x^2}$

$$\frac{d\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx}=\frac{a^2+b^2x^2}{(a^2-b^2x^2)^2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^2}=\frac{2b^2(3a^2x+b^2x^3)}{(a^2-b^2x^2)^3}$$

$$\frac{d^3\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^3}=\frac{2.3.b^2(a^4+6a^2b^2x^2+b^4x^4)}{(a^2-b^2x^2)^4}$$

$$\frac{d^4\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^4}=\frac{2.3.4.b^4(5a^4x+10a^2b^2x^3+b^4x^5)}{(a^2-b^2x^2)^5}$$

$$\frac{d^5\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^5}=\frac{2.3.4.5.b^4(a^6+15a^4b^2x^2+15a^2b^4x^4+b^6x^6)}{(a^2-b^2x^2)^6}$$

$$\frac{d^6\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^6}=\frac{2.3.4.5.6.b^6(7a^6x+35a^4b^2x^3+21a^2b^4x^5+b^6x^7)}{(a^2-b^2x^2)^7}$$

$$\frac{d^7\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^7}=\frac{2.3.4.5.6.7b^6.(a^8+28a^6b^2x^2+70a^4b^4x^4+28a^2b^6x^6+b^8x^8)}{(a^2-b^2x^2)^8}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Zur Erlangung des allgemeinen independenten Ausdrucks des $n$ten Differentialquotienten ist:

$$\frac{x}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{a-bx}-\frac{1}{a+bx}\right\},$$

also mit Hilfe der Aufgabe 11)

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\tfrac{1}{2}.1.2.3...n.b^{n-1}\left\{\frac{1}{(a-bx)^{n+1}}-(-1)^n\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}\right\}$$

$$=(-1)^{n+1}.\tfrac{1}{2}.1\,2.3...n.b^{n-1}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}+\frac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\};$$

und zwar wird für ein gerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3...n.b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}.\left\{(n+1)_1a^nx+(n+1)_3a^{n-2}b^2x^3+....+b^nx^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1.2.3.....n.b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}.\sum_{h=o}^{h=\frac{1}{2}n}(n+1)_{2h+1}a^{n-2h}b^{2h}x^{2h+1}$$

und für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3.....n.b^{n-1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}.\left\{a^{n+1}+(n+1)_2a^{n-1}b^2x^2+(n+1)_4a^{n-3}b^4x^4+...+b^{n+1}x^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1.2.3...n.b^{n-1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}.\sum_{h=o}^{h=\frac{1}{2}(n+1)}(n+1)_{2h}a^{n-2h+1}b^{2h}x^{2h}$$

oder wenn man hier ebenso wie in der vorigen Aufgabe nach absteigenden Potenzen von $x$ ordnet, sowohl für ein gerades als auch für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{1.2.3...n.b^{n-1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}.\sum_{h=o}^{h\,\overline{\overline{>}}\,\frac{1}{2}n}(n+1)_{2h}a^{2h}b^{n+1-2h}x^{n+1-2h}$$

18) $y=\dfrac{1}{a^2+b^2x^2}$

Wenn man in der Lösung der 16ten Aufgabe $i.b$ für $b$ setzt (wobei zu bemerken, dass hier, wie überall im Folgenden $\sqrt{-1}$ durch $i$ bezeichnet wird), so erhält man für ein gerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n}{2}}.\frac{1.2.3....n.b^n}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}.\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}n}(-1)^h.(n+1)_{2h}a^{n-2h}b^{2h}x^{2h}$$

und für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}.\frac{1.2.3....n.b^{n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}.\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^h.(n+1)_{2h+1}a^{n-2h-1}b^{2h}x^{2h+1}$$

oder wenn man nach fallenden Potenzen von $x$ ordnen will, sowohl für ein gerades als ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^n.\frac{1.2.3....n.b^n}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}.\sum_{h=0}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n}(-1)^h(n+1)_{2h+1}a^{2h}b^{n-2h}x^{n-2h}$$

Man kann hier auch noch andre Ausdrücke erhalten, die unter besondern Umständen von besonderm Vortheile sind, obgleich sie nicht in Gestalt von Reihen, die nach den Potenzen von $x$ geordnet sind, erscheinen. Da nämlich

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a-i.bx}+\frac{1}{a+i.bx}\right\}$$

so wird nach Aufgabe 11)

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=i^n.\frac{1.2.3....n.b^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a-i.bx)^{n+1}}+(-1)^n.\frac{1}{(a+i.bx)^{n+1}}\right\}$$

oder wenn man: $a=\varrho.\cos\varphi$
$bx=\varrho.\sin\varphi$

also $\varrho=\sqrt{a^2+b^2x^2}$ und $\varphi=arc\left(tang=\frac{bx}{a}\right)$ setzt:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=i^n.\frac{1.2.3...n.b^n}{2a\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}.\left\{\begin{matrix}\cos(n+1)\varphi+i.\sin(n+1)\varphi\\+(-1)^n\cos(n+1)\varphi\\-(-1)^n i\sin(n+1)\varphi\end{matrix}\right\}$$

mithin für ein gerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1.2.3\ldots.n.b^n}{a\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}.cos\left\{(n+1)\,arc\left(tang=\frac{bx}{a}\right)\right\}$$

und für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{1.2.3\ldots.n.b^n}{a\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}.sin\left\{(n+1)\,arc\left(tang=\frac{bx}{a}\right)\right\}.$$

Man kann auch noch einen Ausdruck erhalten, der gleichzeitig für ein gerades und für ein ungerades $n$ giltig ist. Denn man hat

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{2ia}\left\{\frac{1}{bx-ia}-\frac{1}{bx+ia}\right\}$$

mithin nach Aufgabe 11)

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{(-1)^n.1\,2.3\ldots n.b^n}{2ia}\left\{\frac{1}{(bx-ia)^{n+1}}-\frac{1}{(bx+ia)^{n+1}}\right\}$$

und setzt man hierin für einen Augenblick

$$bx=\varrho\cos\varphi$$
$$a=\varrho\sin\varphi$$

also $\varrho=\sqrt{(a^2+b^2x^2}$ und $\varphi=arc\left(tang=\frac{a}{bx}\right)$, so erhält man auf ähnlichem Wege, wie vorhin, für jedes beliebige $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=\frac{(-1)^n.1.2.3.n.b^n}{a\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}sin\left\{(n+1)\,arc\left(tang=\frac{a}{bx}\right)\right\}.$$

19) $y=\frac{x}{a^2+b^2x^2}$.

Wenn man in der Lösung der 17ten Aufgabe $i.b$ für $b$ setzt, so erhält man für ein gerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.2.3\ldots.n.b^n}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}\cdot\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}n}(-1)^h\cdot(n+1)_{2h+1}\,\frac{a^{n-2h}}{b^{2h}\,x^{2h+1}}$$

und für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1.2.3.n.b^{n-1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}\cdot\sum_{h=0}^{h=\frac{1}{2}(n+1)}(-1)^h\cdot(n+1)_{2h}\,\frac{a^{n-2h+1}}{b^{2h}\,x^{2h}}$$

oder wenn man nach fallenden Potenzen von $x$ ordnet, sowohl für ein gerades als ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3....n.b^{n-1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}\cdot\sum_{h=0}^{h\overline{\overline{>}}\frac{1}{2}n}(-1)^h\cdot(n+1)_{2h}\,\frac{a^{2h}b^{n+1-2h}}{x^{n+1-2h}}$$

Auch hier kann man in ähnlicher Weise, wie bei der vorigen Aufgabe, noch andre Ausdrücke, die nicht nach den Potenzen von $x$ geordnet sind, erhalten, nämlich für ein gerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.2.3...n.b^{n-1}}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}\cdot sin\left\{(n+1)\,arc\left(tang=\frac{bx}{a}\right)\right\}$$

und für ein ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1.2.3..n.b^{n-1}}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}cos\left\{(n+1)\,arc\left(tang=\frac{bx}{a}\right)\right\}$$

oder auch für ein beliebiges, sowohl gerades als ungerades $n$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x}{a^2+b^2x^2}\right)}{dx^n}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3...n.b^{n-1}}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}}\cdot cos\left\{(n+1)\,arc\left(tang=\frac{a}{bx}\right)\right\}$$

20) $y=\frac{1}{x^m-a^m}$.

A. Wenn $m$ gerade ist, so wird bekanntlich

$$\frac{1}{x^m-a^m}=\frac{1}{m\,a^{m-1}}\cdot\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}$$

$$+\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{cos\frac{2h\pi}{m}+i\,.\,sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\,cos\frac{2h\pi}{m}-i\,.\,a\,sin\frac{2h\pi}{m}}$$

$$+\frac{1}{ma^{m-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{cos\frac{2h\pi}{m}-i\,.\,sin\frac{2h\pi}{m}}{x-a\,cos\frac{2h\pi}{m}+i\,.\,a\,sin\frac{2h\pi}{m}}$$

also mit Hilfe von 11), wenn man noch setzt:

$$\cos \varphi_h = \frac{x - a \cos \frac{2h\pi}{m}}{\sqrt{x^2 - 2x\,a \cos \frac{2h\pi}{m} + a^2}}$$

$$\sin \varphi_h = \frac{a \sin \frac{2h\pi}{m}}{\sqrt{x^2 - 2x\,a \cos \frac{2h\pi}{m} + a^2}}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x^m - a^m}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1.2.3...n}{m\,a^{m-1}} \cdot \left\{\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right\}$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1.2.3..n}{\frac{1}{2}m\,a^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1} \frac{\cos\left\{\frac{2h\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right\}}{\sqrt{\left(x^2 - 2xa \cos \frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{n+1}}}$$

B. Wenn $m$ ungerade ist, wird

$$\frac{1}{x^m - a^m} = \frac{1}{ma^{m-1}} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{1}{ma^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos \frac{2h\pi}{m} + i \cdot \sin \frac{2h\pi}{m}}{x - a \cos \frac{2h\pi}{m} - i.a \sin \frac{2h\pi}{m}}$$

$$+ \frac{1}{ma^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos \frac{2h\pi}{m} - i \cdot \sin \frac{2h\pi}{m}}{x - a \cos \frac{2h\pi}{m} + i.a \sin \frac{2h\pi}{m}}$$

also unter ähnlicher Supposition als vorhin

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{x^m - a^m}\right)}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1.2.3...n}{m\,a^{m-1}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n+1}}$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1.2.3...n}{\frac{1}{2}ma^{m-1}} \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} \frac{\cos\left\{\frac{2h\pi}{m} + (n+1)\varphi_h\right\}}{\sqrt{\left(x^2 - 2x\,a \cos \frac{2h\pi}{m} + a^2\right)^{n+1}}}$$

21) $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$

Unter derselben Annahme als in der vorigen Aufgabe wird für ein gerades $m$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x^p}{x^m-a^m}\right)}{dx^n}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots n}{m\,a^{m-p-1}}\cdot\left\{\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-(-1)^p\cdot\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right\}$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots.n}{\frac{1}{2}ma^{m-p-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}m-1}\frac{\cos\left\{\frac{2h(p+1)\pi}{m}+(n+1)\varphi_h\right\}}{\sqrt{\left(x^2-2xa\cos\frac{2h\pi}{n}+a^2\right)^{n+1}}}$$

für ein ungerades $m$:

$$\frac{d^n\left(\frac{x^p}{x^m-a^m}\right)}{dx^n}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots.n}{ma^{m-p-1}}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n+1}}$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots n}{\frac{1}{2}ma^{m-p-1}}\cdot\sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}}\frac{\cos\left\{\frac{2h(p+1)\pi}{m}+(n+1)\varphi_h\right\}}{\sqrt{\left(x^2-2xa\cos\frac{2h\pi}{n}+a^2\right)^{n+1}}}$$

22) $y=\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}$

$$d\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right\}_x=\frac{\gamma(-2\beta-2\gamma x)}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^2}$$

$$d^2\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right\}_{x^2}=\frac{2\gamma^2(-\alpha^2+4\beta^2+6\beta\gamma x+3\gamma^2x^2)}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^3}$$

$$d^3\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right\}_{x^3}=\frac{2.3.\gamma^3\left\{(\alpha^2-2\beta^2)4\beta+(\alpha^2-4\beta^2)4\gamma x-12\beta\gamma^2x^2-4\gamma^3x^3\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^4}$$

$$d^4\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right\}_{4x}=\frac{2.3.4.\gamma^4\left\{\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4-(\alpha^2-2\beta^2)20\beta\gamma x-(\alpha^2-4\beta^2)10\gamma^2x^2+20\beta\gamma^3x^3+5\gamma^4x^4\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^5}$$

$$d^5\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right\}_{x5}=\frac{2.3.4.5.\gamma^5\left\{-(3\alpha^4-16\alpha^2\beta^2+16\beta^4)2\beta-(\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4)6\gamma x+(\alpha^2-2\beta^2)60\beta\gamma^2x^2+(\alpha^2-4\beta^2)20\gamma^3x^3-30\beta\gamma^4x^4-6\gamma^5x^5\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^6}$$

$$d^6\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^6} = \frac{\begin{array}{c}2.3.4.5.6.\gamma^6\{-\alpha^6+24\alpha^4\beta^2-80\alpha^2\beta^4 \\ +64\beta^6+(21\alpha^4-112\alpha^2\beta^2+112\beta^4)2\beta\gamma x \\ +(\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4)21\gamma^2 x^2 \\ -(\alpha^2-2\beta^2)140\beta\gamma^3x^3-(\alpha^2-4\beta^2)35\gamma^4x^4 \\ +42\beta\gamma^5x^5+7\gamma^6x^6\}\end{array}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^7}$$

$$d^7\left\{\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^7} = \frac{\begin{array}{c}2.3.4.5.6.7.\gamma^7\{(\alpha^6-10\alpha^4\beta^2+24\alpha^2\beta^4-16\beta^6) \\ .8\beta+(\alpha^6-24\alpha^4\beta^2+80\alpha^2\beta^4-64\beta^6)8\gamma x \\ -(3\alpha^4-16\alpha^2\beta^2+16\beta^4)56\beta\gamma^2x^2 \\ -(\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4)56\gamma^3x^3+(\alpha^2-2\beta^2) \\ .280\beta\gamma^4x^4+(\alpha^2-4\beta^2)56\gamma^5x^5-56\beta\gamma^6x^6 \\ -8\gamma^7x^7\}\end{array}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^8}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Um den allgemeinen independenten Ausdruck des $n$ten Differentialquotienten zu erhalten, schreibe man zunächst:

$$y = \frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2} = -\frac{1}{(\beta^2-\alpha^2)-(\beta+\gamma x)^2},$$

dann kann man die Lösung der 16ten Aufgabe benutzen, indem man $a^2=\beta^2-\alpha^2$, $b=1$, $x=\beta+\gamma x$ setzt, wobei wohl zu beachten ist, was im Anfang des §. 5 über die Differentiation einer Function von einer andern Function gesagt ist. Wir könnten hier ebenso wie in der 16ten Aufg. verschiedene Fälle unterscheiden; nehmen wir jedoch gleich die allgemeinste Formel, so wird diese durch die genannten Substitutionen in folgende übergehn:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right)}{dx^n} = (-1)^n.\frac{1.2.3\ldots.n.\gamma^n}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^{n+1}}$$

$$.\sum_{h=0}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n} (n+1)_{2h+1}(\beta^2-\alpha^2)^h.(\beta+\gamma x)^{n-2h}$$

Es wird aber, wenn man die Potenz des Binoms entwickelt:

$$\sum_{h=o}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n} (n+1)_{2h+1} (\beta^2-\alpha^2)^h . (\beta+\gamma x)^{n-2h} = \sum_{h=o}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n} (n+1)_{2h+1} (\beta^2-\alpha^2)^h$$

$$. \sum_{k=o}^{k=n-2h} (n-2h)_k \gamma^{n-2h-k} x^{n-2h-k} \beta^k$$

oder wenn man $2h+k=p$, also $k=p-2h$ setzt und beachtet, dass $(n-2h)_k=(n-2h)_{n-2h-k}$ ist

$$= \sum_{h=o}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n} (n+1)_{2h+1} (\beta^2-\alpha^2)^h . \sum_{p=2h}^{p=n} (n-2h)_{n-p} \gamma^{n-p} x^{n-p} \beta^{p-2h}$$

und wenn man nach §. 5 Nro. $f$ die Summenzeichen vertauscht und zugleich beachtet, dass $(n+1)_{2h+1}.(n-2h)_{n-p}=(n+1)_{n-p}.(p+1)_{2h+1}$ oder allgemein, dass $\alpha_r . r_s = \alpha_s . (\alpha-s)_{r-s}$ ist, so wird:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n.\gamma^n}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^{n+1}}$$

$$. \sum_{p=o}^{p=n} (n+1)_{n-p} . \gamma^{n-p} x^{n-p} . \sum_{h=o}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}p} (p+1)_{2h+1} (\beta^2-\alpha^2)^h . \beta^{p-2h}$$

welches ein nach absteigenden Potenzen von $x$ geordneter Ausdruck ist.

Anmerkung. Für den speciellen Fall, dass $\beta^2-\alpha^2<o$ ist, kann man noch einen andern Ausdruck für den $n$ten Differentialquotienten erhalten. Setzt man nämlich, ähnlich wie in Aufg. 18:

$$\cos\varphi = \frac{\beta+\gamma x}{\sqrt{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}}$$

und

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}}$$

so wird:

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right)}{dx^n} = (-1)^n . \frac{1.2.3\ldots.n.\sin(n+1)\varphi}{\sqrt{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^{n+1}}}.$$

23) $y = \frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}$

$$d\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_x = \frac{\alpha^2-\gamma^2 x^2}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^2}$$

$$d^2\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^2} = \frac{2.\gamma.\left\{-2\alpha^2\beta-3\alpha^2\gamma x+\gamma^3 x^3\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^3}$$

$$d^3\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^3} = \frac{2.3.\gamma^2.\left\{(\alpha^2+4\beta^2)\alpha^2+8\alpha^2\beta\gamma x+6\alpha^2\gamma^2 x^2-\gamma^4 x^4\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^4}$$

$$d^4\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^4} = \frac{2.3.4.\gamma^3.\left\{(\alpha^2-2\beta^2).4\alpha^2\beta+(\alpha^2-4\beta^2)5\alpha^2\gamma x-20\alpha^2\beta\gamma^2 x^2-10\alpha^2\gamma^3 x^3+\gamma^5 x^5\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^5}$$

$$d^5\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^5} = \frac{2.3.4.5.\gamma^4.\left\{(\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4)\alpha^2-(\alpha^2-2\beta^2)24\alpha^2\beta\gamma x-(\alpha^2-4\beta^2)15.\alpha^2\gamma^2 x^2+40\alpha^2\beta\gamma^3 x^3+15\alpha^2\gamma^4 x^4-\gamma^6 x^6\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^6}$$

$$d^6\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^6} = \frac{2.3.4.5.6.\gamma^5.\left\{(-3\alpha^4+16\alpha^2\beta^2-16\beta^4).2\alpha^2\beta-(\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4)7\alpha^2\gamma x+(\alpha^2-2\beta^2)84\alpha^2\beta\gamma^2 x^2+(\alpha^2-4\beta^2).35\alpha^2\gamma^3 x^3-70\alpha^2\beta\gamma^4 x^4-21\alpha^2\gamma^5 x^5+\gamma^7 x^7\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^7}$$

$$d^7\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^7} = \frac{2.3.4.5.6.7.\gamma^6.\left\{(-\alpha^6+24\alpha^4\beta^2-80\alpha^2\beta^4+64\beta^6)\alpha^2-(3\alpha^4-16\alpha^2\beta^2+16\beta^4).16\alpha^2\beta\gamma x+(\alpha^4-12\alpha^2\beta^2+16\beta^4)28\alpha^2\gamma^2 x^2-(\alpha^2-2\beta^2)224\alpha^2\beta\gamma^3 x^3-(\alpha^2-4\beta^2).70\alpha^2\gamma^4 x^4+112\alpha^2\beta\gamma^5 x^5+28\alpha^2\gamma^6 x^6-\gamma^8 x^8\right\}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2)^8}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Auf dieselbe Weise, wie man den allgemeinen Ausdruck des $n$ten Differentialquotienten bei der vorigen Aufgabe aus dem der 16ten ableitete, so kann man den gegenwärtigen aus denen der 16ten und 17ten Aufg. zusammengenommeu erhalten. Man muss nämlich den hier vorliegenden Bruch $\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}$, um ihn mit denen in 16 und 17 vergleichen zu können, in folgende zwei zerlegen:

$$-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\beta+\gamma x}{(\beta^2-\alpha^2)-(\beta+\gamma x)^2}+\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{1}{(\beta^2-\alpha^2)-(\beta+\gamma x)^2}$$

Dann ergiebt sich unter denselben Annahmen als vorhin:

$$d^n\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2 x^2}\right\}_{x^n}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots.n.\gamma^{n-1}}{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^{n+1}}$$

$$\cdot\left[\gamma^{n+1}x^{n+1}+\sum_{p=1}^{p=n}(n+1)_{p+1}\gamma^{n-p}x^{n-p}\right.$$

$$\left.\cdot\left\{(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{p+1}{2}}+\sum_{h=o}^{h\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}p}\frac{4h-p}{2h+1}\cdot(p+1)_{2h}(\beta^2-\alpha^2)^h\beta^{p+1-2h}\right\}\right],$$

wobei zu bemerken ist, dass das Glied $(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{p+1}{2}}$ nur dann mitzurechnen ist, wenn $p$ eine ungerade Zahl bedeutet.

Anmerkung. Auch hier kann man für den speciellen Fall, dass $\beta^2-\alpha^2<o$ ist, ähnlich wie in der vorigen Aufgabe, noch einen andern Ausdruck erhalten. Wenn nämlich $\varphi$ dieselbe Bedeutung wie dort hat, so wird

$$d^n\left\{\frac{x}{\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2}\right\}_{x^n}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots.n.\gamma^{n-1}}{\sqrt{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^{n+1}}}$$

$$\cdot\left\{\cos(n+1)\varphi-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\sin(n+1)\varphi\right\},$$

oder wenn man noch $\beta=a.\sin c$ setzt:

$$=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots.n.\gamma^{n-1}}{\sqrt{(\alpha^2+2\beta\gamma x+\gamma^2x^2)^{n+1}}}\cdot\frac{\cos\{c+(n+1)\varphi\}}{\cos c}.$$

24) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$.

$$d\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_x = -\frac{b^2x}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$d^2\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x2} = -\frac{b^2(a^2-2b^2x^2)}{(a^2+b^2x^2)^2\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$d^3\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x3} = \frac{3b^4(3a^2x-2b^2x^3)}{(a^2+b^2x^2)^3\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$d^4\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x4} = \frac{3b^4(3a^4-24a^2b^2x+8b^4x^3)}{(a^2+b^2x^2)^4\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$d^5\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x5} = -\frac{3.5b^6(15a^4x-40a^2b^2x^3+8b^4x^5)}{(a^2+b^2x^2)^5\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$d^6\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x6} = -\frac{3.5b^6(15a^6-270a^4b^2x^2+360a^2b^4x^4-48b^6x^6)}{(a^2+b^2x^2)^6\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$d^7\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x7} = \frac{3.5.7b^8(105a^6x-630a^4b^2x^3+504a^2b^4x^5-48b^6x^7)}{(a^2+b^2x^2)^7\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Wenn man zur independenten Bestimmung des $n$ten Differentialquotienten gelangen will, denke man sich für einen Augenblick $\frac{bx}{a} = tang\,\varphi$ gesetzt, wodurch

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2+{}^2bx^2}} = \frac{1}{a}\cos\varphi \text{ und } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{b}{a}\cos\varphi^2, \text{ also}$$

$$dy_x = -\frac{1}{a}\sin\varphi \,.\, d\varphi_x = -\frac{b}{a^2}\sin\varphi \,.\, \cos\varphi^2 = -\frac{b}{a^2}\cos\varphi^3 \,.\, tang\,\varphi$$

$$d^2y_{x2} = -\frac{b^2}{a^3}\,.\,\cos\varphi^5(1-2\,tang\,\varphi^2)$$

u. s. w. wird, so erkennt man leicht bei fortgesetzter Differentiation die allgemeine Form der Differentialquotienten, deren allgemeine Giltigkeit sich durch den bekannten Schluss von $n$ auf $n+1$ nachweisen lässt, nämlich:

$$d^{2n}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x^{2n}} = (-1)^{n+1}\,.\,\frac{b^{2n}}{a^{2n+1}}\,.\,\cos\varphi^{4n+1}$$

$$.\left\{\overset{2n}{A_0} - \overset{2n}{A_1}\,tg\,.\,\varphi^2 + \overset{2n}{A_2}\,tg\,\varphi^4 - \overset{2n}{A_3}\,tg\,\varphi^6 + \ldots + (-1)^n\,\overset{2n}{A_n}\,tg\,\varphi^{2n}\right\}$$

und

$$d^{2n+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x^{2n+1}} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{b^{2n+1}}{a^{2n+2}}\cdot \cos\varphi^{4n+3}$$

$$\cdot\left\{\overset{2n+1}{A_0}\, tg\,\varphi - \overset{2n+1}{A_1}\, tg\,\varphi^3 + \overset{2n+1}{A_2}\, tg\,\varphi^5 \ldots\ldots + (-1)^n \overset{2n+1}{A_n}\, tg\,\varphi^{2n+1}\right\}$$

oder wenn man wieder rückwärts $tg\,\varphi = \frac{bx}{a}$, also $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$ einsetzt:

$$d^{2n}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x^{2n}} = (-1)^n\cdot\frac{b^{2n}}{(a^2+b^2x^2)^{2n}\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$\cdot\left\{\overset{2n}{A_0}\, a^{2n} - \overset{2n}{A_1}\, a^{2n-2}b^2x^2 + \overset{2n}{A_2}\, a^{2n-4}b^4x^4 - \ldots + (-1)^n\overset{2n}{A_n}\, b^{2n}x^{2n}\right\}$$

$$d^{2n+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x^{2n+1}} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{b^{2n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{2n+1}\sqrt{a^2+b^2x^2}}\;.$$

$$\cdot\left\{\overset{2n+1}{A_0}\, a^{2n}bx - \overset{2n+1}{A_1}\, a^{2n-2}b^3x^3 + \ldots + (-1)^n\overset{2n+1}{A_n}\, b^{2n+1}x^{2n+1}\right\}$$

Indem man den $2n$ten Differentialquotienten zweimal hintereinander differentiirt, erhält man Relationen zwischen den einzelnen Coefficienten, aus deren richtiger Beachtung sich folgendes allgemeine Bildungsgesetz ergibt:

$$\overset{2n}{A_p} = \frac{\left\{(2n).(2n-1)(2n-2)\ldots.(n-p+1)\right\}^2}{1.2.3\ldots.(2p).2^{2n-2p}},$$ (für $p=o$ wird der Nenner $=2^{2n}$)

$$\overset{2n+1}{A_p} = \frac{\left\{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots.(n-p+1)\right\}^2}{1.2.3\ldots.(2p+1).2^{2n-2p}}.$$

Ordnet man die Entwickelungen nach fallenden Potenzen von $x$, so erhält man allgemein, sowohl für ein gerades, als für ein ungerades $n$:

$$d^n\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\right\}_{x^n} = (-1)^n\cdot\frac{b^n}{(a^2+b^2x^2)^n\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

$$\cdot\sum_{p=o}^{p\overline{\overline{<}}\frac{n}{2}}(-1)^p\frac{\left\{n(n-1)(n-2)\ldots.(p+1)\right\}^2}{1.2.3\ldots.(n-2p).2^{2p}}\, a^{2p}.\, b^{n-2p}.\, x^{n-2p},$$

wobei die Facultät $1.2.3\ldots(n-2p)$ im Nenner, für $p=\frac{1}{2}n$, der Einheit gleichzusetzen ist.

25) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$

$$d^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} \right\}_{x^n} = \frac{b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$$

$$\cdot \sum_{p=0}^{p \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}} \frac{\{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)\}^2}{1.2.3\ldots(n-2p).2^{2p}} \cdot a^{2p} . b^{n-2p} . x^{2n-p}.$$

26) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$.

$$d \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_x = \frac{a^2}{(a^2 \pm b^2 x^2)\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

$$d^2 \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^2} = \mp \frac{3 a^2 b^2 x}{(a^2 \pm b^2 x^2)^2 \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

$$d^3 \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^3} = \mp \frac{3 a^2 b^2 (a^2 \mp 4 b^2 x^2)}{(a^2 \pm b^2 x^2)^3 \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

$$d^4 \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^4} = \frac{3.5.a^2 b^4 (3a^2 x \mp 4 b^2 x^3)}{(a^2 \pm b^2 x^2)^4 \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

$$d^5 \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^5} = \frac{3.5.a^2 b^4 (3 a^4 \mp 36 a^2 b^2 x^2 + 24 b^4 x^4)}{(a^2 \pm b^2 x^2)^5 \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

$$d^6 \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^6} = \mp \frac{3.5.7.a^2 b^6 (15 a^4 x \mp 60 a^2 b^2 x^3 + 24 b^4 x^5)}{(a^2 \pm b^2 x^2)^6 \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

$$d^7 \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^7} = \mp \frac{3.5.7.a^2 b^6 .(15 a^6 \mp 360 a^4 b^2 x^2 + 720 a^2 b^4 x^4 \mp 192 b^6 x^6)}{(a^2 \pm b^2 x^2)^7 \sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Um das independente Bildungsgesetz des $n$ten Differentialquotienten zu erhalten, hat man nach II. §. 5. a

$$d^n \left\{ x . \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^n} = x . d^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^n} + n . d^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 x^2}} \right\}_{x^n}$$

also mit Hilfe der beiden vorhergehenden Aufgaben 24) und 25) nach einiger Reduction:

$$d^n\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2\pm b^2x^2}}\right\}_{x^n}=(\mp 1)^{n-1}\frac{b^{n-2}}{(a^2\pm b^2x^2)^n\sqrt{a^2\pm b^2x^2}}$$

$$\cdot\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{<}}\frac{n-1}{2}}(\pm 1)^p\cdot\frac{1}{(p+1)n(n+1)}\cdot\frac{\{(n+1)n(n-1)..(p+1)\}^2}{1.2.3..(n-2p-1)2^{2p+1}}\cdot a^{2p+2}b^{n-2p}\cdot x^{n-2p-1}$$

27) $y=\sqrt{a^2\pm b^2x^2}$

Da $d\left\{\sqrt{a^2\pm b^2\,x^2}\right\}_x=\pm\dfrac{b^2\cdot x}{\sqrt{a^2\pm b^2\,x^2}}$ ist, so wird

$$d^n\left\{\sqrt{a^2\pm b^2\,x^2}\right\}_{x^n}=\pm b^2\cdot d^{n-1}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2\pm b^2x^2}}\right\}_{x^{n-1}}$$

also mit Hilfe der vorigen Aufgabe:

$$d^n\left\{\sqrt{a^2\pm b^2\,x^2}\right\}_{x^n}=(\mp 1)^n\frac{b^{n-1}}{(a^2\pm b^2\,x^2)^{n-1}\sqrt{a^2\pm b^2x^2}}$$

$$\cdot\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{<}}\frac{n-2}{2}}(\pm 1)^{p+1}\frac{1}{(p+1)(n-1)n}\cdot\frac{\{n(n-1)(n-2)..(p+1)\}^2}{1.2.3..(n-2p-2)2^{2p+1}}\cdot a^{2p+2}b^{n-2p-1}\cdot x^{n-2p-2}$$

28) $y=\sqrt{a^2\pm b^2\,x^2)^\mu}$

$$d^n\left\{\sqrt{a^2\pm b^2\,x^2)^\mu}\right\}_{x^n}=(\pm 1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots.n.b^n\sqrt{(a^2\pm b^2\,x^2)^\mu}}{(a^2\pm b^2\,x^2)^n}$$

$$\cdot\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{>}}\frac{n-1}{2}}(\pm 1)^p\,(\mu-2p)_{n-2p}\cdot\left(\frac{\mu}{2}\right)_p\cdot a^{2p}\,b^{n-2p}\cdot x^{n-2p}$$

Anmerkung. Hieraus ergibt sich auch als specieller Fall der von *Jacobi* (*Crelle's* Journal XV, S. 3) gefundene Satz, dass für $\cos z=x$

$$d^{i-1}\left\{(1-x^2)^{i-\frac{1}{2}}\right\}_{x^{i-1}}=(-1)^{i-1}.1.3.5\ldots(2i-1)\cdot\frac{\sin i z}{i}$$

wird, wenn man nur beachtet, dass man nach einer allgemeinen goniometrischen Formel

$$\sin iz=\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{>}}\frac{i}{2}-1}(-1)^p\cdot 2^{i-2p-1}\cdot(i-p-1)_p\cdot\sin z\cdot\cos z^{i-2p-1}$$

hat und dass

$$1.2.3..(i-1).(2i-2p-1)_{i-2p-1}(i-\tfrac{1}{2})_p=\frac{2^{i-2p-1}}{i}.1.3.5..(2n-1).(i-p-1)_p$$

ist.

29) $y=(a^2\pm b^2x^2)^\mu$

$$d^n\{(a^2\pm b^2x^2)^\mu\}_{x^n}=(\pm1)^n\,1.2.3\ldots n\,.\,b^n.(a^2\pm b^2x^2)^{\mu-n}$$
$$.\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{>}}\frac{n-1}{2}}(\pm1)^p(2\mu-2p)_{n-2p}\,.\,\mu_p a^{2p}b^{n-2p}x^{n-2p}$$

30) $y=x(a^2\pm b^2x^2)^\mu$

$$d^n\{x(a^2\pm b^2x^2)^\mu\}_{x^n}=(\pm1)^n.1.2.3\ldots n.b^n(a^2\pm b^2x^2)^{\mu-n}$$
$$.\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{>}}\frac{n}{2}}(\pm1)^p.\frac{n+1}{2(\mu+1)}.(2\mu-2p+2)_{n-2p+1}(\mu+1)_p.a^{2p}.b^{n-2p}.x^{n-2p+1}$$

31) $y=x^2(a^2\pm b^2x^2)^\mu$

$$d^n\{x^2(a^2\pm b^2x^2)^\mu\}_{x^n}=(\pm1)^n.1.2.3\ldots n.b^n(a^2\pm b^2x^2)^{\mu-n}.\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{<}}\frac{n+2}{2}}(+1)^p$$
$$.(2\mu-2p+2)_{n-2p+2}(\mu)_p\frac{n(n+1)(\mu-p+1)+2(n-p+1)(\mu+1)}{(2\mu-n+2)(2\mu-n+1)(\mu-p+1)}a^{2p}b^{n-2p}x^{n-2p+2}$$

32) $y=(ax^\alpha+bx^\beta)^m$, unter der Voraussetzung, dass $m$ eine positive ganze Zahl ist.

$$d^n\{(ax^\alpha+bx^\beta)^m\}_{x^n}=1.2.3\ldots.n\,a^m x^{m\alpha-n}$$
$$.\sum_{p=0}^{p=m}m_p\left(\frac{b}{a}\right)^p[m\alpha+p(\beta-\alpha)]_n.x^{p(\beta-\alpha)}$$

33) $y=(a+\sqrt{bx})^m$

$$dy_x=m.\tfrac{1}{2}.b^{\frac{1}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-1}.x^{-\frac{1}{2}}$$
$$d^2y_{x^2}=m(m-1).\frac{1}{2^2}.b^{\frac{2}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-2}.x^{-\frac{2}{2}}-m.\frac{1}{2^2}b^{\frac{1}{2}}$$
$$.(a+\sqrt{bx})^{m-1}.x^{-\frac{3}{2}}$$
$$d^3y_{x^3}=m(m-1)(m-2).\frac{1}{2^3}.b^{\frac{3}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-3}.x^{-\frac{3}{2}}-m(m-1)$$
$$.\frac{3}{2^3}.b^{\frac{2}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-2}.x^{-\frac{4}{2}}+m.\frac{3}{2^3}.b^{\frac{1}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-1}.x^{-\frac{5}{2}}$$

$$d^4y_{x^4} = m(m-1)(m-2)(m-3).\frac{1}{2^4}.b^{\frac{4}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-4}.x^{-\frac{4}{2}}$$
$$-m(m-1)(m-2).\frac{6}{2^4}.b^{\frac{3}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-3}.x^{-\frac{5}{2}}+m(m-1).\frac{15}{2^4}$$
$$.b^{\frac{2}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-2}.x^{-\frac{6}{2}}-m.\frac{15}{2^4}.b^{\frac{1}{2}}(a+\sqrt{bx})^{m-1}.x^{-\frac{7}{2}}$$

$$d^5y_{x^5} = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).\frac{1}{2^5}.b^{\frac{5}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-5}$$
$$.x^{-\frac{5}{2}}-m(m-1)(m-2)(m-3).\frac{10}{2^5}.b^{\frac{4}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-4}.x^{-\frac{6}{2}}$$
$$+m(m-1)(m-2).\frac{45}{2^5}.b^{\frac{3}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-3}.x^{-\frac{7}{2}}-m(m-1).\frac{105}{2^5}$$
$$.b^{\frac{2}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-2}.x^{-\frac{8}{2}}+m.\frac{105}{2^5}.b^{\frac{1}{2}}.(a+\sqrt{bx})^{m-1}.x^{-\frac{9}{2}}$$

Hieraus ergibt sich sehr leicht, dass man im Allgemeinen folgende Form anzunehmen hat:

$$d^n\{(a+\sqrt{bx})^m\}_{x^n} = \sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p.m_{n-p}.\frac{1.2.3.....(n-p)}{2^n}$$
$$.b^{\frac{n-p}{2}}.\overset{n}{A}_p.(a+\sqrt{bx})^{m-n+p}.x^{-\left(\frac{n+p}{2}\right)}$$

Setzt man einer Seits hierin $n+1$ für $n$ und differentiirt andrer Seits diesen Ausdruck noch einmal in Bezug auf $x$, so ergibt sich folgende Bedingungsgleichung:

$$\sum_{p=o}^{p=n}(-1)^p.m_{n-p+1}.\frac{1.2.3...(n-p+1)}{2^{n+1}}.b^{\frac{n-p+1}{2}}.\overset{n+1}{A}_p.(a+\sqrt{bx})^{m-n+p-1}$$
$$.x^{-\left(\frac{n+p+1}{2}\right)} = \sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p.m_{n-p+1}.\frac{1.2.3.....(n-p+1)}{2^{n+1}}.b^{\frac{n-p+1}{2}}$$
$$.\overset{n}{A}_p(a+\sqrt{bx})^{m-n+p-1}.x^{-\left(\frac{n+p+1}{2}\right)}-\sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p.m_{n-p}.\frac{1.2.3...(n-p)}{2^{n+1}}$$
$$.b^{n-p}.(n+p).\overset{n}{A}_p.(a+\sqrt{bx})^{m-n+p}.x^{-\left(\frac{n+p+2}{2}\right)}$$

Setzt man in der letzten Summe $p-1$ für $p$, so erhält man folgende Relationen zwischen den Coefficienten:

a) $\overset{n+1}{A}_p = \overset{n}{A}_p + (n+p-1)\overset{n}{A}_{p-1}$

b) $\overset{n}{A}_0 = 1$

c) $\overset{n+1}{A}_n = (2n-1)\overset{n}{A}_{n+1}$

Schreibt man in der ersten Gleichung $r$ für $n$ und bildet dann die Summe von $r=1$ bis $r=n-1$, so wird

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \overset{r+1}{A}_p = \sum_{r=1}^{r=n-1} \overset{r}{A}_p + \sum_{r=1}^{r=n-1} (r+p-1)\overset{r}{A}_{p+1}$$

Die einzelnen Terme des ersten Gliedes der rechten Seite heben sich gegen die einzelnen Terme der linken Seite auf und bleibt nur links $\overset{n}{A}_p$ und rechts $\overset{1}{A}_p$ stehen. Wenn aber $p > o$, so wird $\overset{1}{A}_p = o$, mithin resultirt:

$$\overset{n}{A}_p = \sum_{r=1}^{r=n-1} (r+p-1)\overset{r}{A}_{p-1}$$

Indem man hierin für $p$ nach einander 1, 2, 3,.... einsetzt, erhält man sehr bald den allgemeinen Werth für $\overset{n}{A}_p$, welcher sich durch die Relation a) leicht verificiren lässt, nämlich

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)\ldots.(n+p-2)(n+p-1)}{2^p.1.2.3\ldots.p}$$

Sonach wird also unser gesuchter Differentialquotient:

$$d^n \left\{(a+\sqrt{bx})^m\right\}_{x^n} = \sum_{p=o}^{p=n-1} (-1)^p . \frac{m(m-1)(m-2)\ldots..(m-n+p+1) .(n-p)(n-p+1)\ldots..(n+p-1)}{2^n.2.4.6\ldots.2p}$$

$$. b^{\frac{n-p}{2}} . (a+\sqrt{bx})^{m-n+p} . x^{-\left(\frac{n+p}{2}\right)}$$

34) $y = e^x$

$$d^n\left\{e^x\right\}_{x^n} = e^x$$

35) $y = e^{a+bx}$

$$d^n\left\{e^{a+bx}\right\}_{x^n} = b^n . e^{a+bx}$$

$y = e^{a^2 + b^2 x^2}$

$dy_x = 2b \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot bx$

$d^2 y_{x^2} = 2b^2 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \{2b^2 x^2 + 1\}$

$d^3 x_{x^3} = 4b^3 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \{2b^3 x^3 + 3bx\}$

$d^4 y_{x^4} = 4b^4 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \{4b^4 x^4 + 12b^2 x^2 + 3\}$

$d^5 y_{x^5} = 8b^5 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \{4b^5 x^5 + 20b^3 x^3 + 15bx\}$

$d^6 y_{x^6} = 8b^6 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \{8b^6 x^6 + 60b^4 x^4 + 90b^2 x^2 + 15\}$

$d^7 y_{x^7} = 16b^7 \cdot e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \{8b^7 x^7 + 84b^5 x^5 + 210b^3 x^3 + 105bx\}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$d^n \left\{e^{a^2 + b^2 x^2}\right\}_{x^n} = e^{a^2 + b^2 x^2} \cdot \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2} n} (2^{n-p} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2p+1)}{2p+1} \cdot n_{2p} \cdot b^{2n-2p} \cdot x^{n-2p}$$

7) $y = a_x$

$$d^n \left\{a^x\right\}_{x^n} = a^x (\log a)^n$$

3) $y = (a e^{\alpha x} + b e^{\beta x})^m$, unter der Voraussetzung, dass $m$ eine positive ganze Zahl ist

$$d^n \left\{(a e^{\alpha x} + b e^{\beta x})^m\right\}_{x^n} = a^m e^{m \alpha x} \sum_{p=0}^{p=m} m_p \left(\frac{b}{a}\right)^p \cdot [m\alpha + p(\beta - \alpha)]^n e^{p(\beta - \alpha)x}$$

9) $y = e^x \cdot x^m$

$dy_x = e^x \cdot \{x^m + m x^{m-1}\}$

$d^2 y_{x^2} = e^x \cdot \{x^m + 2m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2}\}$

$d^3 y_{x^3} = e^x \cdot \{x^m + 3m x^{m-1} + 3m(m-1) x^{m-2} + m(m-1)(m-2) x^{m-3}\}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$d^n \left\{e^x x^m\right\}_{x^n} = e^x \cdot \sum_{p=0}^{p=n} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p \cdot n_p \cdot m_p \cdot x^{m-p}$$

) $y = \log x$

Da $\frac{d \cdot \log x}{dx} = \frac{1}{x}$ ist, so wird $d^n \left\{ \log x \right\}_{x^n} = d^{n-1} \left\{ \frac{1}{x} \right\}_{x^n}$, also nach Beispiel 2 in diesem §:

$$d^n \left\{ \log x \right\}_{x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{x^n}$$

41) $y = \log(a \pm b x)$

Mit Hilfe von Aufgabe 11) wird

$$d^n \left\{ \log(a \pm b x) \right\}_{x^n} = (-1)^{n-1} \frac{1.2.3\ldots(n-1)(\pm b)^n}{(a \pm b x)^n}$$

42) $y = \log(a^2 - b^2 x^2)$

$$dy_x = -\frac{2 b^2 x}{a^2 - b^2 x^2}$$

$$d^2 y_{x^2} = -\frac{2 b^2 (b^2 x^2 + a^2)}{(a^2 - b^2 x^2)^2}$$

$$d^3 y_{x^3} = -\frac{4 b^3 (b^3 x^3 + 3 a^2 b x)}{(a^2 - b^2 x^2)^3}$$

$$d^4 y_{x^4} = -\frac{12 b^4 (b^4 x^4 + 6 a^2 b^2 x^2 + a^4)}{(a^2 - b^2 x^2)^4}$$

$$d^5 y_{x^5} = -\frac{48 b^5 (b^5 x^5 + 10 a^2 b^3 x^3 + 5 a^4 b x)}{(a^2 - b^2 x^2)^5}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$d^n \left\{ \log(a^2 - b^2 x^2) \right\}_{x^n} = -2 \cdot \frac{1.2.3\ldots.(n-1) \cdot b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} \cdot \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2}n} n_{2p} \cdot a^{2p} \cdot b^{n-2p} \cdot x^{n-2p}$$

43) $y = \log(a^2 + b^2 x^2)$

$$d^n \left\{ \log(a^2 + b^2 x^2) \right\}_{x^n} = 2 \cdot \frac{1.2.3\ldots.(n-1) \cdot b^n}{(a^2 + b^2 x^2)^n} \cdot \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2}n} (-1)^{n-p+1} \cdot n_{2p} \cdot a^{2p} \cdot b^{n-2p} \cdot x^{n-2p}$$

44) $y = \log\left( \frac{a + bx}{a - bx} \right)$

Da $d\left\{log\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)\right\}_x=\frac{2ab}{a^2-b^2x^2}$ ist, so wird nach Beispiel 16)

$$d^n\left\{log\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)\right\}_{x^n}=2\cdot\frac{1.2.3\ldots.(n-1).ab^n}{(a^2-b^2x^2)^n}$$

$$\cdot\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}(n-1).} n_{2p+1}\cdot a^{2p}\cdot b^{n-2p-1}\cdot x^{n-2p-1}$$

Allgemeine Bemerkung. Wenn man überhaupt eine Function einer Potenz der unabhängig Veränderlichen $x$ hat und man sucht den Differentialquotienten einer höhern Ordnung dieser Function, so erhält man aus §. 5. b) (pag. 18), wenn man darin $z=x^\lambda$ setzt:

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots.n}{x^n}\cdot\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1.2.3\ldots k}{x^{k\lambda}}f^k(x^\lambda)\cdot\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h\,(h\lambda)_n\ldots\ldots..(A)$$

wobei $f^k(x^\lambda)=\frac{d^k f(z)}{dz^k}$ ist, wenn man nach der Differentiation $z=x^\lambda$ setzt, und wo $k_h$ und $(h\lambda)_n$ respective den $h$ten Binomialcoefficienten der $k$ten Potenz und den $n$ten Binomialcoefficienten der $(h.\lambda)$ten Potenz bedeutet. Für Diejenigen, welchen das Lesen der Summenzeichen nicht geläufig ist, mag dieselbe Formel noch in folgender, weitläufigeren Gestalt dastehn. Es bezeichne:

$$\overset{n}{A}_k=(-1)^{k+1}\cdot\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3..k}\cdot\left\{k_1(\lambda)_n-k_2(2\lambda)_n+k_3(3\lambda)_n-..+(-1)^{k+1}k_k(k\lambda)_n\right\}$$

dann wird

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n}=\frac{1}{x^n}\cdot\left\{\overset{n}{A}_1\,x^\lambda f'(x^\lambda)+\overset{n}{A}_2\,x^{2\lambda}f''(x^\lambda)+\overset{n}{A}_3\,x^{3\lambda}f'''(x^\lambda)+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\overset{n}{A}_n\,x^{n\lambda}f^{(n)}(x^\lambda)\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

Diese sehr allgemeine Formel hat offenbar den Nachtheil, dass sie nur in den seltensten Fällen nach den Potenzen von $x$ geordnet sein wird, da die verschiedenen Differentialquotienten von $f(x^\lambda)$ natürlich wieder Functionen von $x$ sind. Um diese Anordnung nach Potenzen der Variabeln in den Fällen, wo es möglich ist, zu erreichen, werden

jedes Mal noch besondre Untersuchungen und Transformationen erforderlich sein.

Nimmt man z. B. $f(x^\lambda) = (a + x^\lambda)^\mu$, so wird nach der obigen Formel

$$d^n \left\{(a+x^\lambda)^\mu\right\}_{x^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{x^n} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k x^{k\lambda}(a+x^\lambda)^{\mu-k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (h\lambda)_n;$$

nun ist

$$(a+x^\lambda)^{\mu-k} = (a+x^\lambda)^{\mu-n} \cdot (a+x^\lambda)^{n-k}$$

$$= (a+x^\lambda)^{\mu-n} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-k} (n-k)_i a^{n-k-i} \cdot x^{i\lambda}$$

oder $i-k$ für $i$ gesetzt: $= (a+x^\lambda)^{\mu-n} \cdot \sum_{i=k}^{i=n} (n-k)_{i-k} a^{n-i} \cdot x^{i\lambda-k\lambda}$

also

$$d^n \left\{(a+x^\lambda)^\mu\right\}_{x^n} = \frac{1.2.3\ldots n.(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k$$

$$\cdot \sum_{i=k}^{i=n} (n-k)_{i-k} a^{n-i} x^{i\lambda} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} . k_h (h\lambda)_n$$

Wenn man nach §. 5 f) (pag. 20) die beiden auf die Indices $k$ und $i$ bezüglichen Summenzeichen vertauscht und darauf nach §. 5 e) (pag. 20) auch noch die auf $k$ und $h$ bezüglichen, so wird

$$d^n \left\{(a+x^\lambda)^\mu\right\}_{x^n} = \frac{1.2.3\ldots n.(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{i=n} a^{n-i} x^{i\lambda} \sum_{h=1}^{h=i} \sum_{k=h}^{k=i} (-1)^{k+h} \mu_k . k_h . (n-k)_{i-k} (h\lambda)_n \ldots\ldots (C)$$

Da nun $\mu_k . k_h = \mu_h . (\mu-h)_{k-h}$ ist, so wird zunächst unsre erste Summe

$$\sum_{k=h}^{k=i} (-1)^{k+h} \mu_k k_h . (n-k)_{i-k} (h\lambda)_n = \mu_h (h\lambda)_n \sum_{k=h}^{k=i} (-1)^{k+h} (\mu-h)_{k-h} (n-k)_{i-k}$$

und wenn man beachtet, dass

$$r_s = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.(r-s+1)}{1.2.3\ldots s}$$

$$= \frac{(-1)^s(-r)(-r+1)(-r+2)\ldots.(-r+s-1)}{1.2.3\ldots s}$$

$$= \frac{(-1)^s(-r+s-1)(-r+s-1-1)(-r+s-1-2)\ldots(-r+s-1-(s-1))}{1.2.3\ldots.s}$$

$$r_s = (-1)^s.(-r+s-1)_s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

also $(n-k)_{i-k} = (-1)^{i-k}.(-n+i-1)_{i-k}$ ist, so wird:

$$\sum_{k=h}^{k=i} (-1)^{k+h} \mu_k k_h (n-k)_{i-k} (h\lambda)_n = (-1)^{i+h} \mu_h (h\lambda)_n$$

$$. \sum_{k=h}^{k=i} (\mu-h)_{k-h} (-n+i-1)_{i-k}$$

mit Berücksichtigung aber, dass

$$\sum_{q=0}^{q=p} u_q v_{p-q} = u_0 v_p + u_1 v_{p-1} + u_2 v_{p-2} + \ldots + u_p v_0 = (u+v)_p \ldots\ldots (E)$$

oder nach dem vorigen Satz $(D)$

$$= (-1)^p (-u-v+p-1)_p$$

also $\sum_{k=h}^{k=i} (\mu-h)_{k-h}(-n+i-1)_{i-k} = (-1)^{i-h}(n-\mu)_{i-h};$

$$\sum_{k=h}^{k=i} (-1)^{k+h} \mu_k k_h (n-k)_{i-k} (h\lambda)_n = \mu_h (h\lambda)_n (n-\mu)_{i-h}$$

Hiernach wird Gleichung $(C)$ folgende Gestalt annehmen:

$$d^n \left\{ (a+x^\lambda)^\mu \right\}_{x^n} = \frac{1.2\ldots.n.(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n}$$

$$. \sum_{i=1}^{i=n} a^{n-i} x^{i\lambda} \sum_{h=1}^{h=i} \mu_h (h\lambda)_n (n-\mu)_{i-h} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

Wenn man auch diese Formel für die in der Lesart der Summenzeichen weniger Geübten nach andrer Weise schreiben wollte, so würde es so heissen:

Es bezeichne

$$\overset{n}{A}_i = \mu_1 (\lambda)_n (n-\mu)_{i-1} + \mu_2 (2\lambda)_n (n-\mu)_{i-2} + \mu_3 (3\lambda)_n (n-\mu)_{i-3} + \ldots + \mu_i (i\lambda)_n (n-\mu)_0$$

dann wird

$$d^n \{ (a + x^\lambda)^\mu \}_{x^n} = \frac{1.2.3\ldots n.(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x_n}$$

$$.\left\{ \overset{n}{A}_1 a^{n-1} x^\lambda + \overset{n}{A}_2 a^{n-2} x^{2\lambda} + \overset{n}{A}_3 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} \right\} \ldots \ldots (G)$$

Die oben unter $(A)$ genannte allgemeine Formel für den $n$ten Differentialquotienten einer Function von $x^\lambda$ lässt noch unter gewissen Bedingungen, die über $\lambda$ getroffen werden, geschlossenere Ausdrücke zu.

$\alpha$) Sei zunächst $\lambda = -1$, so wird

$$\frac{d^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{x^n} . \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{-k}}{1.2.3\ldots k} . f^k\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} . k_h . (-h)_n$$

Nun ist aber nach der vorhin angeführten Gleichung $(E)$, wenn man darin $u = -n-1$, $v = k$, $p = k-1$, $q = h-1$ setzt:

$$\sum_{h-1=o}^{h-1=k-1} (-n-1)_{h-1} . k_{k-1-(h-1)} = (-n+k-1)_{k-1}$$

und wenn man auf den ersten Factor der linken Seite und auf den Ausdruck rechts die Gleichung $(D)$ anwendet, so wird

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h-1} (n+h-1)_{h-1} . k_{k-h} = (-1)^{k-1} . (n-1_{k-1}$$

was auch, mit Berücksichtigung dass $k_{k-h} = k_h$ und $(n+h-1)_{h-1} = (n+h-1)_n$ oder nach $(D)$, $= (-1)^n . (-h)_n$ ist, übergeht in:

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+k} k_h (-h)_n = (-1)^n . (n-1)_{k-1} .$$

Hiernach wird unser Differentialquotient:

$$\frac{d^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n . \frac{1.2.3\ldots n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \frac{x^{-k}}{1.2.3\ldots k} f^k\left(\frac{1}{x}\right) \ldots . (H)$$

$\beta$) Sei $\lambda = 2$, so wird nach §. 5. c) (pag. 19), wenn man darin $\gamma^2$ für $\gamma$ setzt

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{2k}}{1.2.3..k} f^k(x^2) \cdot \frac{d^n\left(\frac{x^2}{\gamma^2}-1\right)^k}{dx^n}\left\{\gamma = x\right\}$$

wo die Marke $\left\{\gamma = x\right\}$ bedeuten soll, dass nach der Differentiation $\gamma = x$ gesetzt werden müsse.

Nun ist nach §. 5. a) (pag. 16.)

$$\frac{d^n\left(\frac{x^2}{\gamma^2}-1\right)^k}{dx^n} = (-1)^k . \frac{d^n\left\{\left(1+\frac{x}{\gamma}\right)^k\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)^k\right\}}{dx^n}$$

$$= (-1)^k \sum_{p=o}^{p=n} n_p \frac{d^{n-p}\left(1+\frac{x}{\gamma}\right)^k}{dx^{n-p}} . \frac{d^p\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)^k}{dx^p}$$

Nach §. 6. num. 10 (pag. 24) wird

$$\frac{d^p\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)^k}{dx^p} = (-1)^p \frac{1}{\gamma^p} . 1.2.3....p . k_p\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)^{k-p}$$

Diese Grösse verschwindet wegen des Factors $k_p$ für jedes $p$, welches $> k$ ist und wegen des Factors $\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)$ für jedes $p$, welches $< k$ ist, wenn man darin $\gamma = x$ setzt; sie erhält nur einen von $o$ verschiedenen Zahlenwerth, wenn $p = k$ ist, sie wird, wenn man nach der Differentiation $\gamma = x$ setzt

$$= (-1)^k . \frac{1.2.3....k}{x^k}.$$

Der vorherige Summenausdruck, welcher $= \frac{d^n\left(\frac{x^2}{\gamma^2}-1\right)^k}{dx^n}$ war, wird also nur dann einen von $o$ verschiedenen Werth erhalten können, wenn $p = k$ ist, dadurch wird

$$\frac{d^n\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^k}{dx^n}\Big\{y=x\Big\}=\frac{1.2.3\ldots k.n_k}{dx^{n-k}}\frac{d^{n-k}\left(1+\frac{x}{y}\right)^k}{dx^{n-k}}\Big\{y=x\Big\}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots k.n_k}{x^k}\cdot\frac{1.2.3\ldots(n-k).k_{n-k}}{x^{n-k}}.2^{2k-n}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots.n.k_{n-k}.2^{2k-n}}{x^n}$$

Setzt man dieses in unsern gesuchten Differentialquotienten, so wird

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n}=\frac{1.2.3\ldots n}{(2x)^n}\cdot\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k_{n-k}(2x)^{2k}}{1.2.3\ldots k}f^k(x^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$\gamma$) Sei $\lambda=\frac{1}{2}$, so wird nach §. 5. c) (pag. 19), wenn man darin $y^{\frac{1}{2}}$ für $y$ setzt:

$$\frac{d^n f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^{\frac{k}{2}}}{1.2.3\ldots k}f^k\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d^n\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-1\right)^k}{dx^n}\Big\{y=x\Big\}$$

Nach §. 6. Nro. 33) (pag. 44) wird

$$\frac{d^n\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-1\right)^k}{dx^n}=\sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p\cdot\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-n+p+1).(n-p)(n-p+1)\ldots(n+p-1)}{2^p.2.4.6\ldots.2p}\cdot\frac{\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-1\right)^{k-n+p}}{y^{\frac{n-p}{2}}.x^{\frac{n+p}{2}}}$$

Für die specielle Supposition $y=x$ erhält dieser Ausdruck offenbar nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn $p=n-k$ ist, wodurch sich ergibt:

$$\frac{d^n\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-1\right)^k}{dx^n}\Big\{y=x\Big\}=(-1)^{n-k}\cdot\frac{k.(k-1)(k-2)\ldots2.1..k(k+1)(k+2)\ldots(2n-k-1)}{2^n.2.4.6\ldots.(2n-2k)}\cdot\frac{1}{x^n},$$

mithin unser gesuchter Differentialquotient:

$$\frac{d^n f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx^n} = \frac{1}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} . \frac{k.(k+1)(k+2)\ldots(2n-k-1)}{2.4.6\ldots(2n-2k)} .$$

$$. x^{\frac{k}{2}} . f^k\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (K)$$

) für $k=n$ der Zahlencoefficient $= 1$ wird.

5) $y = \sin px$

$$d\left\{\sin px\right\}_x = p.\cos px = p.\sin\left(px + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$d^2\left\{\sin px\right\}_{x^2} = -p^2 \sin px = p^2.\sin\left(px + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$d^3\left\{\sin px\right\}_{x^3} = -p^3 \cos px = p^3.\sin\left(px + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$d^4\left\{\sin px\right\}_{x^4} = p^4 \sin px = p^4.\sin\left(px + \frac{4\pi}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^n\left\{\sin px\right\}_{x^n} = p^n.\sin\left(px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

16) $y = \cos px$

$$d^n\left\{\cos px\right\}_{x^n} = p^n.\cos\left(px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

7) $y = (\sin px)^m$

Durch wiederholte Differentiation ergibt sich leicht die Form:

$$d^{2n}\left\{(\sin px)^m\right\}_{x^{2n}} = p^{2n} \sum_{k=o}^{k=n} (-1)^{n+k} . \overset{n}{A}_k . (\sin px)^{m-2k}$$

nd hieraus

$$d^{2n+1}\left\{(\sin px)^m\right\}_{x^{2n+1}} = p^{2n+1} \sum_{k=o}^{k=n} (-1)^{n+k} . \overset{n}{A}_k . (m-2k).(\sin px)^{m-2k-1} . \cos px.$$

Durch nochmalige Differentiation erhält man für die Differentialquotienten gerader Ordnung folgende drei recurrirende Gleichungen:

$$\overset{n+1}{A}_k = (m-2k)^2 \overset{n}{A}_k + (m-2k+2)(m-2k+1) \overset{n}{A}_{k-1}$$

$$\overset{n+1}{A}_0 = m^2 \overset{n}{A}_0$$

$$\overset{n+1}{A}_{n+1} = (m-2n)(m-2n-1) \overset{n}{A}_n .$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $r-1$ für $n$, multiplicirt sodann auf beiden Seiten mit $(m-2k)^{2n-2r}$ und nimmt die Summe von $r=k+1$ bis $r=n$, so wird:

$$\sum_{r=k+1}^{r=n} (m-2k)^{2n-2r} . \overset{r}{A}_k = \sum_{r=k+1}^{r=n} (m-2k)^{2n-2r+2} . \overset{r-1}{A}_k$$

$$+ (m-2k+2)(m-2k+1) \sum_{r=k+1}^{r=n} (m-2k)^{2n-2r} . \overset{r-1}{A}_{k-1}$$

Wenn man in der ersten Summe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $r+n$ für $r$ setzt, sie darauf mit der linken Seite vereinigt und beachtet, dass die dritte der vorhin genannten recurrirenden Gleichungen für $n=k-1$ gibt: $\overset{k}{A}_k = (m-2k+2)(m-2k+1)\overset{k-1}{A}_{k-1}$, so folgt:

$$\overset{n}{A}_k = (m-2k+2)(m-2k+1) \sum_{r=k}^{r=n} (m-2k)^{2n-2r} \overset{r-1}{A}_{k-1}$$

Wenn man hierin der Reihe nach 1, 2, 3, .... für $k$ einsetzt und dabei berücksichtigt, dass aus der zweiten der obigen recurrirenden Gleichungen $\overset{n}{A}_0 = m^2 \overset{n-1}{A}_0 = m^4 \overset{n-2}{A}_0 = m^6 \overset{n-3}{A}_0 \ldots m^{2n-2} \overset{1}{A}_0 = m^{2n}$ folgt, so ergibt sich folgende Form für den Coefficienten $A$, dessen allgemeine Giltigkeit sich leicht beweisen lässt, nämlich:

$$\overset{n}{A}_k = \sum_{h=o}^{h=k} (-1)^h \overset{k}{B}_h . (m-2h)^{2n}$$

Setzt man diesen Werth in die erste der drei obigen recurrirenden Gleichungen für die $A$ ein, so erhält man folgende recurrirende Bestimmung für die $B$:

$$\overset{k}{B}_h = \frac{(m-2k+2)(m-2k+1)}{4(k-h)(m-k-h)} . \overset{k-1}{B}_h$$

Setzt man hierin der Reihe nach $k$, $k-1$, $k-2$, ...., $h+1$ für $k$ und multiplicirt alle diese so erhaltenen Gleichungen mit einander, so wird

$$\overset{k}{B}_h = (-4)^{h-k}\overset{h}{B}_h \cdot \frac{m-2h}{m-2k} \cdot (2k-m)_{k-h}$$

mithin:

$$\overset{n}{A}_k = \frac{(-1)^k}{4^k(m-2k)} \cdot \sum_{h=o}^{h=k} 4^h \cdot \overset{h}{B}_h (2k-m)_{k-h}(m-2h)^{2n+1}$$

Wenn man aber in der ersten der drei ursprünglichen recurrirenden Gleichungen $k=n+1$ setzt und die dritte davon subtrahirt, ergibt sich $\overset{n}{A}_{n+1} = o$, mithin

$$o = \overset{n}{A}_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}(m-2n-2)} \cdot \sum_{h=o}^{h=n+1} 4^h \cdot \overset{h}{B}_h (2n+2-m)_{n-h+1} \cdot (m-2h)^{2n+1}$$

oder: $$o = \sum_{h=o}^{h=n+1} 4^h \overset{h}{B}_h (2n+2-m)_{n-h+1} \cdot (m-2h)^{2n+1}$$

woraus man, indem $n$ allmälig $= 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt wird, Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der verschiedenen $B$ erhält. Man braucht nur noch $\overset{o}{B}_o$ zu kennen. Um dieses zu erhalten, setzt man in den vorhin für $\overset{n}{A}_k$ gefundenen Werth, $k=o$, so wird, mit Berücksichtigung des obigen Werths $\overset{n}{A}_o = m^{2n}$:

$$m^{2n} = \frac{1}{m} \cdot \overset{o}{B}_o \cdot m^{2n+1}$$

also: $$\overset{o}{B}_o = 1$$

Mit Hilfe dieses Werths findet sich dann:

$$\overset{h}{B}_h = \frac{1}{4^h} \cdot m_h$$

folglich:

$$\overset{n}{A}_k = \frac{(-1)^k}{4^k(m-2k)} \cdot \sum_{h=o}^{h=k} m_h \cdot (2k-m)_{k-h} \cdot (m-2h)^{2n+1}$$

Hieraus ergibt sich das Endresultat:

$$d^{2n}\left\{\sin px)^m\right\}_{x^{2n}}=(-1)^n.p^{2n}.\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(\sin px)^{m-2k}}{4^k(m-2k)}$$

$$.\sum_{h=0}^{h=k} m_h.(2k-m)_{k-h}.(m-2h)^{2n+1}$$

$$d^{2n+1}\left\{(\sin px)^m\right\}_{x^{2n+1}}=(-1)^n.p^{2n}.\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(\sin px)^{m-2k-1}.\cos px}{4^k}$$

$$.\sum_{h=0}^{h=k} m_h.(2k-m)_{k-h}.(m-2h)^{2n+1}$$

Anmerkung. Wenn $m$ eine positive ganze Zahl ist, wird, wenn es gerade ist

$$y=(\sin px)^m=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r m_r \cos(m-2r)px$$

$$d^n\left\{\sin px)^m\right\}_{x^n}=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}.p^n}{2^m}\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r m_r(m-2r)^n\cos\left\{(m-2r)px+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

und wenn es ungerade ist

$$y=(\sin px)^m=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^m}\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r m_r \sin(m-2r)px$$

$$d^n\left\{(\sin px)^m\right\}_{x^n}=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}.p^n}{2^m}\sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r m_r.(m-2r)^n\sin\left\{(m-2r)px+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

48) $y=(\cos px)^m$

$$d^{2n}\left\{(\cos px)^m\right\}_{x^{2n}}=(-1)^n.p^{2n}.\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(\cos px)^{m-2k}}{4^k(m-2k)}$$

$$.\sum_{h=0}^{h=k} m_h.(2k-m)_{k-h}.(m-2h)^{2n+1}$$

$$d^{2n+1}\left\{\cos px)^m\right\}_{x^{2n+1}} = (-1)^{n+1}.p^{2n}.\sum_{k=o}^{k=n}\frac{(\cos px)^{m-2k-1}.\sin px}{4^k}$$

$$.\sum_{h=o}^{h=k} m_h.(2k-m)_{k-h}.(m-2h)^{2n+1}$$

Anmerkung. Wenn $m$ eine positive ganze Zahl ist, wird

$$y=(\cos px)^m = \frac{1}{2^m}\sum_{r=o}^{r=m} m_r \cos(m-2r)px$$

$$d^n\left\{(\cos px)^m\right\}_{x^n} = \frac{p^n}{2^m}\sum_{r=o}^{r=m} m_r (m-2r)^n \cos\left\{(m-2r)px+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

49) $y=\mathrm{tang}\, x$

Da $d.\left\{\mathrm{tang}\, x\right\}_x = \frac{1}{\cos x^2} = \cos x^{-2}$ ist, so erhält man mit Hilfe des vorigen Beispiels

$$d^{2n}.\left\{\mathrm{tang}\, x\right\}_{x^{2n}} = (-1)^n.2^{2n+2}\sin x.\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{(2\cos x)^{2k+1}}$$

$$.\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h.h^{2n}.(2k)_{k-h}$$

$$d^{2n+1}.\left\{\mathrm{tang}\, x\right\}_{x^{2n+1}} = (-1)^{n+1}2^{2n+2}.\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k.(2\cos x)^{2k}}$$

$$.\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h.h^{2n+2}.(2k)_{k-h}$$

---

## III. Differentiation impliciter Funktionen zweier und mehrer Variabeln.

Wenn man eine Gleichung zwischen mehren Variabeln hat, z. B. $f(x, y, z, u, \ldots) = o$, so erhält man am leichtesten die zu-

gehörigen Differentialgleichungen, wenn man alle darin vorkommenden Variabeln als Funktionen einer neuen Variabeln, etwa $t$, betrachtet, wodurch sich ergibt:

$$\left[\frac{df}{dx}\right]\cdot\frac{dx}{dt}+\left[\frac{df}{dy}\right]\cdot\frac{dy}{dt}+\left[\frac{df}{dz}\right]\cdot\frac{dz}{dy}+\ldots\ldots=o$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left[\frac{d^2f}{dy^2}\right]\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left[\frac{d^2f}{dz^2}\right]\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\ldots\ldots\\
&+2\left[\frac{d^2f}{dx.dy}\right]\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+2\left[\frac{d^2f}{dx.dz}\right]\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+\ldots\ldots\\
&+2\left[\frac{d^2f}{dy.dz}\right]\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+2\left[\frac{d^2f}{dy.du}\right]\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{du}{dt}+\ldots\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left[\frac{df}{dx}\right]\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\left[\frac{df}{dy}\right]\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\frac{df}{dz}\right]\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}=o$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{d^3f}{dx^3}\right]\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+\left[\frac{d^3f}{dy^3}\right]\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^3+\left[\frac{d^3f}{dz^3}\right]\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\\
&+3\left[\frac{d^3f}{dx^2.dy}\right]\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{dy}{dt}+3\left[\frac{d^3f}{dx^2.dz}\right]\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{dz}{dt}+\ldots\ldots\\
&+3\left[\frac{d^3f}{dy^2.dz}\right]\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\cdot\frac{dz}{dt}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+6\left[\frac{d^3f}{dx.dy.dz}\right]\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+6\left[\frac{d^3f}{dx\,dy\,du}\right]\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+\ldots\ldots\\
&+3\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+3\left[\frac{d^2f}{dy^2}\right]\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+3\left[\frac{d^2f}{dx.dy}\right]\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+3\left[\frac{d^2f}{dx.dy}\right]\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\ldots\ldots\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left[\frac{df}{dx}\right]\cdot\frac{d^3x}{dt^3}+\left[\frac{df}{dy}\right]\cdot\frac{d^3y}{dt^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}=o$$

Hier sollen die Differentialquotienten, die in eckige Klammern eingeschlossen sind, partielle Differentialquotienten bedeuten. Sind eine oder mehre der hier vorkommenden Variabeln, z. B. $x$ und $y$, unabhängig veränderlich, so werden alle diejenigen Terme der vorstehenden Gleichungen, welche deren höheren Differentialquotienten

$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots$ ) enthalten, verschwinden und man wird dann die Differentialquotienten bezüglich auf $x$ und $y$ erhalten, indem man beachtet, dass man bei der Vertauschung der unabhängig Veränderlichen ganz allgemein folgende Relationen hat:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^3u}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

u. s. w., oder, wenn die höhern Differentialquotienten von $x$ verschwinden, einfach

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\frac{d^2u}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{\frac{d^3u}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \text{ u. s. w.}$$

---

### Beispiele.

1) $y^n - \frac{x+y}{x-y} = o$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y^2}{n(x^2-y^2)-2xy}$$

2) $x^n - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = o$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$$

3) $y^5 - 5axy + x^5 = o$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay-x^4}{y^4-ax}$$

4) $e^y = x^{y+x}$ (e ist wie gewöhnlich die Basis des natürlichen I rithmen - Systems)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+x\log x}{x(1-\log x)}$$

5) $y^3 - 3y\,arc(sin = x) + x^3 = o$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y\left\{y - x^2\sqrt{1-x^2}\right\}}{(2y^3 - x^3)\sqrt{1-x^2}}$$

6) $\dfrac{m^2 \sin x^2}{a^2 - m^2} = \dfrac{n^2 \sin^2(x+y)}{a^2 - n^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{a^2 - n^2}{a^2 - m^2}} \cdot \frac{\cos x}{\cos(x+y)} - 1$$

7) $y \sin x = x\,arc(tg = y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1+y^2) \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x - (1+y^2)\sin x}$$

8) $xy = arc\left(tg = \dfrac{x}{y}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}$$

9) $\dfrac{y}{x} = arc\left(tg = \dfrac{x}{y}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

10) $y . \log x = x . \log y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - x . \log y}{x - y . \log x}$$

11) $y . \sin n\,x = a\,e^{nx+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{1-y}(1 - \cot g\, n\,x)$$

12) $xy = \log(e^{xy} + e^{-xy})$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

13) $y = x . \log y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)};\ \frac{y^2}{x(y-x}$$

14) $y \,.\, \log x = x \,.\, \log y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(\log x - 1)}{x^2(\log y - 1)}$$

15) $y \,.\, \log x = x \,.\, \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\frac{y - \sin y}{y\cos y - \sin y}\right)$$

16) $u \,.\, \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 - y^2 + m\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{y(y^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

17) $u = arc\left(tang = \frac{x}{y}\right)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left\{ y \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dy}{dt} \right\}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$- \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 - \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$+ \frac{6y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{6x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$+ \frac{6xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{6xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$- \frac{3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{d^3x}{dt^3}$$

18) $u = y^x$

$$\frac{du}{dt} = x y^{x-1} \cdot \frac{dy}{dt} + y^x \,.\, \log y \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = x(x-1) \,.\, y^{x-2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^x \,.\, (\log y)^2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\, y^{x-1}$$

$$\cdot (1 + x \,.\, \log y) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + x \,.\, y^{x-1} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + y^x \,.\, \log y \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

19) $u = y \,.\, \log x$

$$\frac{du}{dt} = \log x \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^3u}{dt^2} = -\frac{15}{8\,(x-1)^{\frac{7}{2}}}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \frac{9}{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot\frac{d^3x}{dt^2} + 3\,\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt} + 3\,\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} + z\cdot\frac{d^3y}{dt^3} + y\cdot\frac{d^3z}{dt^3}$$

27) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$\alpha$) $\frac{x}{a^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{z}{c^2}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$

$\beta$) $\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{x}{a^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$

$$+ \frac{z}{c^2}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$\gamma$) $\frac{3}{a^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{b^2}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{3}{c^2}\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{x}{a^2}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{d^3y}{dt^3}$

$$+ \frac{z}{c^2}\cdot\frac{d^3z}{dt^3} = 0$$

Wenn man hier und in den folgenden Beispielen eine der Variabeln, z. B. $z$ als Funktion der andern betrachten soll, so muss man aus jeder Differentialgleichung alle Differentialquotienten von $z$ mit Ausschluss des höchsten vermittelst der vorhergehenden Gleichung herauseliminiren.

28) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2\,a^2(x^2 - y^2 + z^2)$

$\alpha$) $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\,x\,.\,\frac{dx}{dt} + (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)\,y\,.\,\frac{dy}{dt}$

$$+ (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\,z\,.\,\frac{dz}{dt} = 0$$

$\beta$) $(3x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\,.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (x^2 + 3y^2 + z^2 + a^2)\,.\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$$+ (x^2 + y^2 + 3z^2 - a^2)\,.\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 4xy\,.\,\frac{dx}{dt}\,.\,\frac{dy}{dt} + 4xz$$

$$.\,\frac{dx}{dt}\,.\,\frac{dz}{dt} + 4yz\,.\,\frac{dy}{dt}\,.\,\frac{dz}{dt} + (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\,x\,.\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$+ (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)\,y\,.\,\frac{d^2y}{dt^2} + (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\,z\,.\,\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

) $x^3+y^3+z^3=xy+xz+yz$

$$\alpha)\quad (3x^2-y-z)\cdot\frac{dx}{dt}+(3y^2-x-z)\cdot\frac{dy}{dt}+(3z^2-x-y)\cdot\frac{dz}{dt}=0$$

$$\beta)\quad 6x\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+6y\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+6z\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}-2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}$$
$$-2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+(3x^2-y-z)\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+(3y^2-x-z)\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+(3z^2-x-y)\cdot\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

$$\gamma)\quad 6\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+6\left(\frac{dy}{dt}\right)^3+6\left(\frac{dz}{dt}\right)^3+18x\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+18y\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+18z\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$-3\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}+(3x^2-y-z)\cdot\frac{d^3x}{dt^3}$$
$$+(3y^2-x-z)\cdot\frac{d^3y}{dt^3}+(3z^2-x-y)\cdot\frac{d^3z}{dt^3}=0$$

10) $xz^3+xy^3=xyz+yz$

$$\alpha)\quad (z^3+y^3-yz)\cdot\frac{dx}{dt}+(3xy^2-xz-z)\cdot\frac{dy}{dt}+(3xz^2-xy-y)\cdot\frac{dz}{dt}=0$$

$$\beta)\quad 6xy\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+6xz\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2(3y^2-z)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+2(3z^2-y)$$
$$\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}-2(x+1)\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+(z^3+y^3-yz)\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$+(3xy^2-xz-z)\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+(3xz^2-xy-y)\cdot\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

$$\gamma)\quad 6x\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^3+6x\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^3+18y\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+18z\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$-6\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}+3(3y^2-z)\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+3(3z^2-y)\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$+3(3y^2-z)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-3(x+1)\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+3(3z^2+y)\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-3(x+1)\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}+18xy\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+18xz\cdot\frac{dz}{dt}$$
$$\cdot\frac{d^2z}{dt^2}+(z^3+y^3-yz)\cdot\frac{d^3x}{dt^3}+(3xy^2-xz-z)\cdot\frac{d^3y}{dt^3}$$
$$+(3xz^2-xy-y)\cdot\frac{d^3z}{dt^3}=0$$

31) $x.\log y - y.\log x = xyz$

$$\alpha)\ \left(\log y - \frac{y}{x} - yz\right).\frac{dx}{dt} - \left(\log x - \frac{x}{y} + xz\right).\frac{dy}{dt} - xy.\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\beta)\ \frac{y}{x^2}.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{x}{y^2}.\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + z\right).\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}$$
$$-2y.\frac{dx}{dt}.\frac{dz}{dt} - 2x.\frac{dy}{dt}.\frac{dz}{dt} + \left(\log y - \frac{y}{x} - yz\right).\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$-\left(\log x - \frac{x}{y} + xz\right).\frac{d^2y}{dt^2} - xy.\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\gamma)\ -\frac{2y}{x^3}.\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \frac{2x}{y^3}.\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + \frac{3}{x^2}.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.\frac{dy}{dt} - \frac{3}{y^2}.\frac{dx}{dt}.\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$-6.\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{dz}{dt} + \frac{3y}{x^2}.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{3x}{y^2}.\frac{dy}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+3\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} - z\right).\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dy}{dt} - 3.\frac{d^2x}{dt}.\frac{dz}{dt}$$
$$+3\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} - z\right).\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - 3x.\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{dz}{dt} - 3y.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$-3x.\frac{dy}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\log y - \frac{y}{x} - yz\right).\frac{d^3x}{dt^3}$$
$$-\left(\log x - \frac{x}{y} + xz\right).\frac{d^3y}{dt^3} - xy.\frac{d^3z}{dt^3} = 0$$

32) $xy + xz = y^2 + z^2$

$$\alpha)\ (y+z).\frac{dx}{dt} + (x-2y).\frac{dy}{dt} + (x-2z = 0$$

$$\beta)\ -2.\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2.\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2.\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt} + 2.\frac{dx}{dt}.\frac{dz}{dt} + (y+z).\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$+(x-2y).\frac{d^2y}{dt^2} + (x-2z).\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\gamma)\ -6.\frac{dy}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - 6.\frac{dz}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2} + 3.\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dy}{dt} + 3.\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dz}{dt}$$
$$+3.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} + 3.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2} + (y+z).\frac{d^3x}{dt^3} + (x-2y).\frac{d^3y}{dt^3}$$
$$+(x-2z).\frac{d^3z}{dt^3} = 0$$

) $xy+xz+yz=xyz$

$$\alpha)\ (y+z-yz).\frac{dx}{dt}+(x+z-xz).\frac{dy}{dt}+(x+y-xy).\frac{dz}{dt}=0$$

$$\beta)\ 2(1-z).\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}+2(1-y).\frac{dx}{dt}.\frac{dz}{dt}+2(1-x).\frac{dy}{dt}.\frac{dz}{dt}$$

$$+(y+z-yz).\frac{d^2x}{dt^2}+(x+z-xz).\frac{d^2y}{dt^2}+(x+y-xy).\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

$$\gamma)\ -6.\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{dz}{dt}+3(1-z).\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dy}{dt}+3(1-y).\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dz}{dt}$$

$$+3(1-z).\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2}+3(1-x).\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{dz}{dt}+3(1-y).\frac{dx}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$+3(1-x).\frac{dy}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2}+(y+z-yz).\frac{d^3x}{dt^3}+(x+z-xz).\frac{d^3y}{dt^3}$$

$$+(x+y-xy).\frac{d^3z}{dt^2}=0$$

14) $x^4+y^4+z^4+u^4=(x^2+y^2)zu+(z^2+u^2)xy$

$$\alpha)\ (4x^3-2xzu-yz^2-yu^2).\frac{dx}{dt}+(4y^3-2yzu-xz^2-xu^2).\frac{dy}{dt}$$

$$+(4z^3 \mid 2xyz-x^2u-y^2u).\frac{dz}{dt}+(4u^3-2xyu-x^2z-y^2z).\frac{du}{dt}=0$$

$$\beta)\ 2(6x^2-zu).\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2(6y^2-zu).\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+2(6z^2-xy).\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$+2(6u^2-xy).\left(\frac{du}{dt}\right)^2-2(z^2+u^2).\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}$$

$$-2(x^2+y^2).\frac{dz}{dt}.\frac{du}{dt}-4(xu+yz).\frac{dx}{dt}.\frac{dz}{dt}-4(xz+yu).\frac{dx}{dt}.\frac{du}{dt}$$

$$-4(xu+yz).\frac{dy}{dt}.\frac{du}{dt}-4(xz+yu).\frac{dy}{dt}.\frac{dz}{dt}$$

$$+(4x^3-2xzu-yz^2-yu^2).\frac{d^2x}{dt^2}+(4y^3-2yzu-xz^2-xu^2).\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$+(4z^3-2xyz-x^2u-y^2u).\frac{d^2z}{dt^2}+(4u^3-2xyu-x^2z-y^2z)$$

$$.\frac{d^2u}{dt^2}=0$$

## IV. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des wahren Werths einer Function, die für einen speciellen Werth der Variabeln in unbestimmter Form erscheint.

### §. 8.

Die Form einer Function wird unbestimmt:

a) wenn $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{0}{0}$ wird, für den speciellen Werth $x = a$.

Der wahre Werth wird: $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)} \ldots = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$, wenn die $(n-1)$ ersten Differentialquotienten von $\varphi(x)$ und von $\psi(x)$ für $x = a$ verschwinden, während der $n$te Differentialquotient von einer der beiden Functionen oder von beiden **nicht** $= 0$ wird;

b) wenn $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ wird, für den speciellen Werth $x = a$.

Auch hier ist $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$

c) wenn $f(x) = \varphi(x) . \psi(x) = 0 . \infty$ wird, für $x = a$. Man darf hier nur die Function entweder unter der Form $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$

oder $f(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ schreiben, wodurch man einen der beiden vorhergehenden Fälle erhält;

d) wenn $f(x) = \frac{\lambda(x)}{\omega(x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty - \infty$ wird, für $x = a$. Indem man beide Brüche auf gleiche Benennung bringt, erhält man den zweiten Fall;

e) wenn $f(x) = \left\{\varphi(x)\right\}^{\psi(x)}$ entweder $= 0^0$ oder $= \infty^0$ oder $= 1^\infty$ wird, für $x = a$. Da aber $f(x) = e^{\log f(x)}$ ist, so wird $f(x) = e^{\psi(x) . \log \varphi(x)}$, wobei dann nur der Exponent $\psi(x) . \log \varphi(x)$

eine der vorher genannten unbestimmten Formen erhält und demgemäss zu behandeln ist.

In manchen Fällen ist es zweckmässiger, statt des genannten Verfahrens das folgende anzuwenden. Man setze $a+h$ für $x$ in die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein und entwickele sie nach den aufsteigenden Potenzen von $h$, wobei mehre der Functionen $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)\ldots\ldots$ und ebenso $\psi(a)$, $\psi'(a)$, $\psi''(a)\ldots\ldots$ der Voraussetzung gemäss verschwinden werden. Dann wird sich der übrigbleibende Bruch durch eine gewisse Potenz von $h$ heben lassen. Nachdem man dieses gethan, setzt man $h=0$ und erhält dadurch den gesuchten wahren Werth von $f(a)$.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs Functionen zweier Variabeln $x$ und $y$ sind, zwischen denen noch eine Bedingungsgleichung $f(x, y)=0$ gegeben ist, und der Bruch wird $\frac{0}{0}$ für gewisse zusammengehörige Werthe $a$ und $b$ von $x$ und $y$, so kann man vermittelst der Bedingungsgleichung $f(x, y)=0$ die eine der beiden Variabeln aus dem Bruch herauseliminiren und dann nach den obigen Regeln verfahren. Man kann aber auch folgenden einfachern Weg wählen.

Es sei $u=\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$ und zugleich $f(x, y)=0$, ferner sei $\frac{\varphi(a, b)}{\psi(a, b)}=\frac{0}{0}$, dann hat man $u.\psi(x, y)=\varphi(x, y)$; mithin durch Differentiation:

$$\psi(x, y).du_x+u.\left\{\left[\frac{d\psi(x, y)}{dx}\right]+\left[\frac{d\psi(x, y)}{dy}\right].dy_x\right\}=\left[\frac{d\varphi(x, y)}{dx}\right]$$
$$+\left[\frac{d\varphi(x, y)}{dy}\right].dy_x$$

Setzt man nun hierin $x=a$ und $y=b$, so verschwindet das erste Glied der linken Seite wegen der Bedingung $\psi(a, b)=0$, und man erhält eine Bestimmungsgleichung für $u$; würde auch dieser Werth $=\frac{0}{0}$, so wiederholt man dasselbe Verfahren. Diese Methode ist besonders in dem Falle von Wichtigkeit, welcher in der Anwendung am

häufigsten vorkommt, nämlich wenn $u=\frac{dy}{dx}$ ist, wobei sich dann so gleich ergibt, dass der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, wenn er für gewisse Werthe von $x$ und $y$ scheinbar unbestimmt wird, in der That mehrdeutig ist, da man zu seiner Bestimmung eine Gleichung höhern Grades erhält.

## §. 9.

### Beispiele.

1) $u=\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{m}{n}a^{m-n}$

2) $u=\frac{mx^{m+1}-(m+1)x^m+1}{x^2-2x+1}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{m(m+1)}{2}$.

3) $u=\frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=3$

4) $u=\frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$; für $x=5$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{3}{29}$

5) $u=\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$; für $x=-1$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{5}{8}$

6) $u=\frac{x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{16}x+\frac{9}{32}}{x^4+\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}}$; für $x=-\frac{3}{4}$, wird $u=\frac{0}{0}=-\frac{120}{59}$

7) $u=\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$; $\begin{cases}\text{für } x=+2, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=\frac{3}{5}\\ \text{für } x=-2, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=-\frac{3}{5}\end{cases}$

8) $u=\frac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$; $\begin{cases}\text{für } x=+3, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=10\\ \text{für } x=-3, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=\frac{1}{16}\end{cases}$

9) $u=\frac{x^4+x^3-11x^2-9x+18}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$; $\begin{cases}\text{für } x=1, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=\frac{4}{5}\\ \text{für } x=-2, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=\frac{1}{2}\\ \text{für } x=3, \text{ wird } u=\frac{0}{0}=\frac{6}{7}\end{cases}$

10) $u=\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$; für $x=c$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{a}{b}$

11) $u=\frac{a^5+a^4x-ax^4-x^5}{a^4+2a^3x+2a^2x^2+2ax^3+x^4}$; für $x=-a$, wird $u=\frac{0}{0}=2a$

12) $u=\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$; für $x=2$, wird $u=\frac{0}{0}=0$

13) $u = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}$; $\begin{cases} \text{für } x = -1, \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \infty \\ \text{für } x = +2, \text{ wird } u = \frac{0}{0} = \frac{1}{3} \\ \text{für } x = -2, \text{ wird } u = \frac{0}{0} = -1 \end{cases}$

14) $u = \frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = \infty$

15) $u = \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{n a^{n-1}}$

16) $u = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = \sqrt{\frac{3}{8}}$

17) $u = \frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{\sqrt{x - a}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = a\sqrt{3}$

18) $u = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$

19) $u = \frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$; f. $x = a$, wird $= \frac{0}{0} = -5a$

20) $u = \frac{a^x - b^x}{x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \log \frac{a}{b}$

21) $u = \frac{a^x - b^x}{\log(1-x)}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \log \frac{a}{b}$

22) $u = \frac{a^n - x^n}{\log(a^n) - \log(x^n)}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = a^n$

23) $u = \frac{1 - x + \log x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$; für $x = 1$, wird $u = \frac{0}{0} = -1$

24) $u = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - x^2}}{x^2}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{2a^2}$

25) $u = \frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \sqrt{a}$

26) $u = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = 2a\sqrt{2a}$

27) $u = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - \sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$; für $x = a$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{16}{9}a$

28) $u = \frac{(x-c)\sqrt{x-b} + \sqrt{x-c}}{\sqrt{2c} - \sqrt{x+c} + \sqrt{x-c}}$; für $x = c$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$

29) $u=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

30) $u=\dfrac{a+\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt[3]{x^3-a^3}-\sqrt{x^2-a^2}}$; für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=0$

31) $u=\dfrac{\sqrt[3]{2a^3-x^3}-\sqrt{5a^2-4x^2}}{x\sqrt[4]{8a^2x^2+8ax^3}-\sqrt[5]{20a^6x^4+12a^4x^6}}$;

für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=\dfrac{20}{9\,.\,a}$

32) $u=\dfrac{x-\sqrt[3]{32a^2x-24ax^2}+\sqrt[6]{40a^3x^3+24a^2x^4}-\sqrt[3]{2x^3-a^3}}{3a(9x-10a)+\sqrt[4]{36a^3x+45x^4}\,\sqrt[3]{2x^3-a^3}}$;

für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=\dfrac{1}{24\,.\,a}$

33) $u=\dfrac{x^x-x}{1-x+\log x}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=-2$

34) $u=\dfrac{xe^x+e^{-x}-e^x-xe^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=-1$

35) $u=\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{1}{6}$

36) $u=\dfrac{e^x-1}{e^x\,.\log(1-x)}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=1$

37) $u=\dfrac{a^{\log x}-x}{\log x}$; für $x=1$, wird $u=\frac{0}{0}=\log a-1$

38) $u=\dfrac{a-x+a\log x-a\,.\log a}{a-\sqrt{2ax-x^2}}$; für $x=a$, wird $u=\frac{0}{0}=-1$

39) $u=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=2$

40) $u=\dfrac{\sin x}{x^2}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=\infty$

41) $u=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=\frac{1}{6}$

42) $u=\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; für $x=0$, wird $u=\frac{0}{0}=2$

43) $u=\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x-\cos x}$; für $x=\frac{1}{2}\pi$, wird $u=\frac{0}{0}=1$

$u = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin x^3}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$

$u = \frac{2 \sin x^2 + \sin x - 1}{2 \sin x^2 - 3 \sin x + 1}$; für $x = \frac{1}{6}\pi$, wird $u = \frac{0}{0} = -3$

$u = \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$

$u = \frac{1 - \cos x}{\cos x \,.\, \sin x^2}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}$

$u = \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + x) - \sin\beta \,.\, \sin x}{\sin(\alpha + \beta + x)}$; für $x = \pi - \alpha - \beta$, wird $u = \frac{0}{0} = \sin\alpha$.

$u = \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$

$u = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \,.\, \cos x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 4$

$u = \frac{tg(a + x) - tg(a - x)}{arc(tg = a + x) - arc(tg = a - x)}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{1 + a^2}{\cos a^2}$

$u = \frac{\log tg\, x}{\log tg\, 2x}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = 1$

$u = \frac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{g^x \sin gx - h^x \sin hx}$; für $x = 0$, wird $u = \frac{0}{0} = \frac{a - b}{g - h}$

$u = \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$; für $x = 1$, wird $u = \infty - \infty = -\frac{1}{2}$

$u = \frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\log x}$; für $x = 1$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$

$u = \frac{1}{\sin x^2} - \frac{1}{x^2}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{3}$

$u = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x - 1}$; für $x = 1$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$

$u = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \tan g\, x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{6}$

$u = x \,.\, tg\, x - \frac{\pi}{2} \sec x$; für $x = \frac{\pi}{2}$, wird $u = \infty - \infty = -1$

$u = \frac{1}{(\log 1 + x)} - \frac{1}{x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty - \infty = \frac{1}{2}$

61) $u=\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}$; für $x=0$, wird $u=-\infty+\infty=\frac{1}{6}$

62) $u=\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$; für $x=0$, wird $u=\infty-\infty=\frac{\pi^2}{6}$

63) $u=\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$; für $x=0$, wird $u=\infty-\infty=\frac{\pi^2}{8}$

64) $u=\frac{1}{a-x}-\frac{14a^2}{5a^3-ax^2-4x^3}$; für $x=a$, wird $u=\infty-\infty=-\frac{13}{14a}$

65) $u=\frac{log\left(\frac{1}{x}\right)}{cotg\,x}$; für $x=0$, wird $u=\frac{\infty}{\infty}=0$

66) $u=\frac{a^x}{x}$; für $x=\infty$, wird $u=\frac{\infty}{\infty}=\infty$

67) $u=\frac{log\,x}{x}$; für $x=\infty$, wird $u=\frac{\infty}{\infty}=0$

68) $u=\frac{x^{-1}}{cotg\,x}$; für $x=0$, wird $u=\frac{\infty}{\infty}=1$

69) $u=\frac{log\left(1-\frac{x}{a}\right)}{cotg\,\frac{\pi x}{a}}$; für $x=a$, wird $u=\frac{\infty}{\infty}=0$

70) $u=\frac{log(x-1)+tang\frac{\pi x}{2}}{cotg\,\pi x}$; für $x=1$, wird $u=\frac{\infty}{\infty}=-2$

71) $u=(1-x).log(1-x)$; für $x=1$, wird $u=0.\infty=0$

72) $u=\frac{x^2-a^2}{x^2}tang.\frac{\pi x}{2a}$; für $x=a$, wird $u=0.\infty=-\frac{4}{\pi}$

73) $u=(a-x).tang\frac{\pi x}{2a}$; für $x=a$, wird $u=0.\infty=\frac{2a}{\pi}$

74) $u=tang\,2x.cotg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; für $x=\frac{\pi}{4}$, wird $u=\infty.0=\frac{1}{2}$

75) $u=sec\frac{\pi x}{2}\,log\frac{1}{x}$; für $x=1$, wird $u=\infty.0=\frac{2}{\pi}$

76) $u=sec^2\frac{\pi x}{2}.sin\,vers\,2\pi x$; für $x=1$, wird $u=\infty.0=8$

77) $u = 2^x \cdot tang\, \frac{a}{2^x}$; für $x = \infty$, wird $u = \infty \cdot 0 = a$

78) $u = x^n \cdot log\, x$; für $x = 0$, wird, wenn $n$ positiv ist, $u = 0 \cdot \infty = 0$

79) $u = x^x$; für $x = 0$, wird $u = 0^0 = 1$

80) $u = x^{\frac{1}{x}}$; für $x = \infty$, wird $u = \infty^0 = 1$

81) $u = x^{\frac{1}{1-x}}$; für $x = 1$, wird $u = 1^\infty = \frac{1}{e}$

82) $u = \left(\frac{1}{x}\right)^{sin\, x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty^0 = 1$

83) $u = \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{tang \frac{\pi}{2a}}$; für $x = a$, wird $u = 1^\infty = e^{\frac{2}{\pi}}$

84) $u = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{tang \frac{\pi x}{a}}$; für $x = a$, wird $u = 0^0 = 1$

85) $u = \left(\frac{1}{x}\right)^{tang\, x}$; für $x = 0$, wird $u = \infty^0 = 1$

86) $u = x^{log(1+x)}$; für $x = 0$, wird $u = 0^0 = 1$

87) Wenn $y^4 - a^2y^2 + 2a^2x^2 - x^4 = 0$ ist, dann wird für $x = 0$ und

$y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm\sqrt{2}$

88) Wenn $(y^2 + ax)^2 = x^2(a^2 + 2ax - x^2)$ ist, dann wird für $x = 0$ und

$y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$

89) Wenn $(y^2 - x^2)^2 = x^3 - 2axy^2$ ist, dann wird für $x = 0$ und

$y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}$

90) Wenn $y^4 - 96\, a^2y^2 + 100\, a^2x^2 - x^4 = 0$ ist, dann wird für $x = 0$

und $y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm\sqrt{\frac{25}{24}}$

91) Wenn $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ist, dann wird für $x = 0$ und

$y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \pm 1$

92) Wenn $y^2(a - x) = x^3$ ist, dann wird für $x = 0$ $y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 0$

93) Wenn $(x^2+y^2)^2=a^2xy$ ist, dann wird für $x=0$ und $y=0$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=0$$

94) Wenn $y^4+(a^2+x^2)y^2=a^2x^2$ ist, dann wird für $x=0$ und $y=0$: $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\pm 1$

95) Wenn $(x-y)(x^2+y^2)=a(x+y)^2$ ist, dann wird für $x=0$ und $y=0$: $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=-1$

96) Wenn $(y^2+x^2)^2-6axy^2=ax^2(2x-a)$ ist, dann wird für $x=0$ und $y=0$: $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}=\infty$

---

# V. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung der Maxima und Minima der Funktionen.

## §. 10.

Wenn man

a) eine Funktion einer einzigen Variabeln hat: $u=f(x)$, so setzt man $\frac{du}{dx}=f'(x)$ entweder $=0$ oder $=\infty$, bestimmt aus dieser Bedingungsgleichung den Werth von $x$ und setzt denselben in den zweiten Differentialquotienten; ist dieser negativ, so gehört der gefundene Werth von $x$ zu einem Maximum der Funktion $u$; ist er dagegen positiv, so gehört der gefundene Werth von $x$ zu einem Minimum derselben, und ist er endlich für denselben Werth der Variabeln $=0$, so darf man noch kein Urtheil darüber fällen, ob ein Maximum oder Minimum überhaupt stattfindet oder nicht, dieses entscheidet sich erst dadurch, dass man denselben Werth der Variabeln, für welchen die beiden ersten Differentialquotienten verschwinden, in die folgenden einsetzt: wenn dann der erste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, so darf man aus seinem negativen oder positiven Werth respective auf ein Maximum oder Minimum schliessen;

it dagegen der erste nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung, so erlangt man dadurch die Ueberzeugung, dass für diesen Werth der Variabeln $x$ weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet.

Wenn man

b) eine Funktion zweier von einander unabhängigen Variabeln hat: $u=f\,(x,\ y)$, so setzt man $\left[\frac{du}{dx}\right]=0$ und $\left[\frac{du}{dy}\right]=0$, wo die eckigen Klammern, hier sowohl wie auch sonst, die partiellen Differentialquotienten andeuten sollen. Die aus diesen beiden Gleichungen erhaltenen Werthe von $x$ und $y$ setzt man in $\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]$, $\left[\frac{d^2u}{dx\,.\,dy}\right]$, $\left[\frac{d^2u}{dy^2}\right]$, dann muss zunächst, damit überhaupt ein ausgezeichneter Werth stattfinden könne, für diese Werthe

$$\left[\frac{d^2u}{dx\,.\,dy}\right]^2-\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\cdot\left[\frac{d^2u}{dy^2}\right]<0$$

sein, und man erhält ein Maximum oder Minimum der Funktion $u$, je nachdem für dieselben Werthe der Variabeln die Differentialquotiente

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right] \text{ und } \left[\frac{d^2u}{dy^2}\right]$$

gleichzeitig negativ oder positiv werden.

Wenn man

c) eine Funktion dreier von einander unabhängigen Variabeln hat: $u=f(x,\ y,\ z)$, so setzt man

$$\left[\frac{du}{dx}\right]=0,\ \left[\frac{du}{dy}\right]=0,\ \left[\frac{du}{dz}\right]=0.$$

Die hieraus berechneten Werthe der drei Variabeln $x,\ y,\ z$ führt man in sämmtliche zweite partiellen Differentialquotienten ein; dann muss, damit überhaupt ein ausgezeichneter Werth der Funktion $u$ stattfinden könne, zunächst den beiden Bedingungen

$$\left[\frac{d^2u}{dx.dy}\right]^2-\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\cdot\left[\frac{d^2u}{dy^2}\right]<0$$

$$\left\{\left[\frac{d^2u}{dx.dz}\right]\cdot\left[\frac{d^2u}{dx.dy}\right]-\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\cdot\left[\frac{d^2u}{dy.dz}\right]\right\}^2-\left\{\left[\frac{d^2u}{dx.dy}\right]^2-\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\cdot\left[\frac{d^2u}{dy^2}\right]\right\}$$
$$\cdot\left\{\left[\frac{d^2u}{dx.dz}\right]^2-\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\cdot\left[\frac{d^2u}{dz^2}\right]\right\}<0$$

genügt werden, und es wird dann ein Maximum oder Minimum stattfinden, je nachdem für dieselben Werthe der Variabeln die Differentialquotienten

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right],\ \left[\frac{d^2u}{dy^2}\right],\ \left[\frac{d^2u}{dz^2}\right]$$

gleichzeitig negativ oder positiv werden.

Wenn die Funktion noch mehr als drei Variable enthält, so verfährt man in ähnlicher Weise. Man setzt:

$$\left[\frac{du}{dx}\right]=0,\ \left[\frac{du}{dy}\right]=0,\ \left[\frac{du}{dz}\right]=0,\ \left[\frac{du}{dt}\right]=0,\ \ldots\ldots$$

und bestimmt durch Einsetzen der hieraus erhaltenen Werthe der Variabeln das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten von $u$ und je nachdem dieser negativ oder positiv ist, erhält man ein Maximum oder Minimum.

Wenn man

d) eine Funktion mehrer von einander **nicht** völlig unabhängiger Variabeln hat. Es sei $u=f(x,\ y,\ z,\ t,\ \ldots.)=0$ eine Funktion von $n$ Variabeln, zwischen denen noch Bedingungsgleichungen:

$$\varphi(x,y,z,t,\ldots)=0,\ \psi(x,y,z,t,\ldots)=0,\ \pi(x,y,z,t,\ldots)=0,\ \text{u s. w.}$$

in der Anzahl $m$ gegeben sind, dann betrachte man alle Variabeln als willkührliche Funktionen einer einzigen neuen Variabeln $\omega$ und setze die ersten Differentialquotienten, sowohl von $u$ als von den $m$ Bedingungsgleichungen $=0$; also:

$$\left[\frac{du}{dx}\right].dx_\omega+\left[\frac{du}{dy}\right].dy_\omega+\left[\frac{du}{dz}\right].dz_\omega+\left[\frac{du}{dt}\right].dt_\omega+\ldots=0$$
$$\left[\frac{d\varphi}{dx}\right].dx_\omega+\left[\frac{d\varphi}{dy}\right].dy_\omega+\left[\frac{d\varphi}{dz}\right].dz_\omega+\left[\frac{d\varphi}{dt}\right].dt_\omega+\ldots=0$$
$$\left[\frac{d\psi}{dx}\right].dx_\omega+\left[\frac{d\psi}{dy}\right].dy_\omega+\left[\frac{d\psi}{dz}\right].dz_\omega+\left[\frac{d\psi}{dz}\right].dt_\omega+\ldots=0$$
$$\left[\frac{d\pi}{dx}\right].dx_\omega+\left[\frac{d\pi}{dy}\right].dy_\omega+\left[\frac{d\pi}{dz}\right].dz_\omega+\left[\frac{d\pi}{dt}\right].dt_\omega+\ldots=0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus diesen $m+1$ Gleichungen kann man $m$ von den gewöhnlichen Differentialquotienten $dx_\omega$, $dy_\omega$, $dz_\omega$, $dt_\omega$, .... herauseliminiren, so dass eine einzige Gleichung übrig bleibt, welche nur $n-m$ derselben enthält, die nun als von einander unabhängig zu betrachten sind. Die Form der resultirenden Gleichung wird etwa sein:

$$X.dx_\omega + Y.dy_\omega + Z.dz_\omega + T.dt_\omega + \ldots\ldots = 0.$$

Wenn nun ein Maximum oder Minimum stattfinden soll, so muss man haben:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ T = 0, \ldots\ldots$$

Aus diesen Gleichungen, mit Hinzuziehung der $m$ ursprünglich gegebenen Bedingungsgleichungen:

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ \pi = 0, \ldots\ldots$$

kann man sämmtliche $n$ Variable bestimmen. Die so erhaltenen Werthe derselben setzt man in den zweiten vollständigen Differentialquotienten von $u$, welcher mit Berücksichtigung von $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, ... wird:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\omega} = \left[\frac{dX}{dx}\right].(dx_\omega)^2 + \left[\frac{dY}{dx}\right].dx_\omega.dy_\omega + \left[\frac{dZ}{dx}\right].dx_\omega.dz_\omega + \ldots\ldots \\ + \left[\frac{dX}{dy}\right].dy_\omega.dx_\omega + \left[\frac{dY}{dy}\right].(dy_\omega)^2 + \left[\frac{dZ}{dy}\right].dy_\omega.dz_\omega + \ldots\ldots \\ + \left[\frac{dX}{dz}\right].dz_\omega.dx_\omega + \left[\frac{dY}{dz}\right].dz_\omega.dy_\omega + \left[\frac{dZ}{dz}\right].(dz_\omega)^2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck für den Fall eines Maximums beständig negativ und für den Fall eines Minimums beständig positiv, unabhängig von dem Werthe von $dx_\omega$, $dy_\omega$, $dz_\omega$, .... sein muss, so ist in beiden Fällen zunächst erforderlich, dass dieser Ausdruck $=0$ gesetzt und dann aufgelöst in Bezug auf irgend eine der Grössen $dx_\omega$, $dy_\omega$, $dz_\omega$, .. stets imaginäre Wurzeln habe, was sich in jedem einzelnen Fall leichter bestimmen lässt, als es im Allgemeinen bei einer nicht bestimmten Anzahl von Variabeln möglich ist. Ob das nachher vorhandene Vorzeichen ein positives oder ein negatives ist, lässt sich dann mit Leichtigkeit ermitteln.

In allen genannten Fällen kann man bei der Entscheidung, ob die gefundenen Werthe der Variabeln die Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen, in sofern auf eine Schwierigkeit stossen, als der zweite oder überhaupt der Differentialquotient der geraden Ordnung für die gefundenen Werthe der Variabeln unendlich werden, wobei man dann wegen des Vorzeichens im Zweifel sein kann. Man setzt alsdann den gefundenen Werth der Variablen $\pm h$ für die Variable in den zweiten Differentialquotienten, entwickelt ihn nach den aufsteigenden Potenzen von $\pm h$ und bestimmt seinen Werth für den Augenblick des Verschwindens dieses $h$.

e) Wenn eine Funktion $u$ von $x$ implicite durch $f(u, x) = 0$ gegeben ist, so erhält man durch partielle Differentiation

$$\left[\frac{d f(n, x)}{d u}\right] \cdot \frac{du}{dx} + \left[\frac{d f(u, x)}{d x}\right] = 0$$

und hieraus, da für den Fall eines Maximums oder Minimums $\frac{du}{dx} = 0$ sein muss:

$$\left[\frac{d f(u, x)}{d x}\right] = 0$$

Aus dieser und der Gleichung

$$f(u, x) = 0$$

muss man $u$ eliminiren, wodurch man eine Gleichung zur Bestimmung desjenigen Werths von $x$ erhält, der zu einem Maximum oder Minimum von $u$ gehört.

## §. 10.

### Beispiele.

1) $u = ax - x^2$; für $x = \frac{1}{2}a$, wird $u = \frac{1}{4}a^2$ ein Maximum.

2) $u = 2x + 3\sqrt[3]{(a-x)^2}$; für $x = a - 1$, wird $u = 2a + 1$ ein Max.

3) $u = x(a-x)^2$; für $x = \frac{1}{3}a$, wird $u = \frac{4a^3}{27}$ ein Max.

„ $x = a$, wird $u = 0$ ein Minimum.

4) $u = x^4 - 8ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 12a^4$; für $x = a$, wird $u = 3a^4$ ein Min.

„ $x = 2a$, „ $u = 4a^4$ „ Max.

„ $x = 3a$, „ $u = 3a^4$ „ Min.

5) $u=m+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax-x^2)^4}$; für $x=a$, wird $u=m+\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^8}$ ein Max.
„ $x=2a$, „ $u=m$ „ Min.
„ $x=0$, „ $u=m$ „ Min.

6) $u=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$; für $x=+1$, wird $u=+2$ ein Max.
„ $x=-1$, „ $u=-2$ „ Min.

7) $u=\frac{x^3-x}{x^4-x^2+1}$; für $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, wird $u=+\frac{1}{2}$ ein Max.
„ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, „ $u=+\frac{1}{2}$ „ Max.
„ $x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, wird $u=-\frac{1}{2}$ ein Min.
„ $x=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, „ $u=-\frac{1}{2}$ „ Min.

8) $u=\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$; für $x=0$, wird $u=\frac{27}{4}$ ein Min.

9) $u=x\sqrt{ax-x^2}$; für $x=\frac{3}{4}a$, wird $u=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ ein Max.

10) $u=x^2\sqrt{4a^2-x^2}$; für $x=\pm 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$, wird $u=\frac{16}{3}a^3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Max.

11) $u=\frac{\sqrt{(a^4+x^4)^3}}{2a^2x^3}$; für $x=a$, wird $u=a\sqrt{2}$ ein Min.

12) $u=a(x-b)^4$; für $x=b$, wird $u=0$ ein Min.

13) $u=x^5-5ax^4+5a^2x^3+a^5$; für $x=a$, wird $u=2a^5$ ein Max.
„ $x=3a$, „ $u=-26a^5$ ein Min.

14) $u=(x-1)(2-x)^2$; für $x=2$, wird $u=0$ ein Min.
„ $x=\frac{4}{3}$, „ $u=\frac{4}{27}$ „ Max.

15) $u=x^5-7x^4+16x^3-8x^2-16x+16$; für $x=2$, wird $u=0$ ein Min.
„ $x=-\frac{2}{5}$ „ $u=\frac{62208}{3125}$ e. Max.

16) $au^3-u^2x^2+x^4=0$; für $x=\pm 2a\sqrt{2}$, wird $u=4a$ ein Min.

17) $u^2-2mxu+x^2-a^2=0$; für $x=+\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$, wird $u=+\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$ e. Max.
„ $x=-\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$, „ $u=-\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$ e. Min.

18) $u=x^x$; für $x=\frac{1}{e}$, wird $u=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ ein Min.

19) $u=e^x.\cos 2x$; für $x=\frac{1}{2}\,arc\,(tg=\frac{1}{2})$, wird $u=\frac{2e^{\frac{1}{2}arc(tg=\frac{1}{2})}}{\sqrt{5}}$ e. Max.

20) $u^4-4a^2ux+x^4=0$; für $x=+a\sqrt[8]{3}$, wird $u=a\sqrt[8]{27}$ ein Max.
„ $x=-a\sqrt[8]{3}$, „ $u=-a\sqrt[8]{27}$ ein Min.

21) $u=x^6-6x^4+4x^3+9x^2-12x+4$; für $x=1$, wird $u=0$ ein Min.
„ $x=-2$, wird $u=0$ ein Max.
„ $x=-1$, „ $u=16$ e. Max.

22) $u=x^8+\frac{1}{7}x^7-4x^6-\frac{3}{5}x^5+6x^4+x^3-4x^2-x$;
für $x=-1$, wird $u$ ein Min.
„ $x=+1$, „ $u$ ein Min.
„ $x=-\frac{1}{8}$, „ $u$ ein Max.

23) $u=\frac{1}{7}x^7-\frac{8}{5}x^5+\frac{19}{3}x^3-12x$; für $x=+1$, wird $u$ ein Min.
„ $x=-1$, „ $u$ „ Max.
„ $x=+2$, „ $u$ „ Min.
„ $x=-2$, „ $u$ „ Max.
„ $x=+\sqrt{3}$, „ $u$ „ Max.
„ $x=-\sqrt{3}$, „ $u$ „ Min.

24) $u^3-3aux+x^3=0$; für $x=a\sqrt[3]{2}$, wird $u=a\sqrt[4]{4}$ ein Max.

25) $u=\left(\frac{a}{x}\right)^x$ für $x=\frac{a}{e}$, wird $u=e^{\frac{a}{e}}$ ein Max.

26) $au^2+2bxu+cx^2+2du+2ex+f=0$;

für $x=-\frac{bd-ae}{b^2-ac}\pm\frac{b}{b^2-ac}\sqrt{\frac{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)}{ac}}$

wird $u=\frac{cd-be}{b^2-ac}\mp\frac{c}{b^2-ac}\sqrt{\frac{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)}{ac}}$

respective fürs obere Zeichen ein Max., fürs untere ein Min.

27) $u=\frac{x}{\log x}$; für $x=e$, wird $u=e$ ein Min.

28) $u=\sin x^m.\sin^n(a-x)$; für $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}.arc\left(\sin=\frac{m-n}{m+n}\sin a\right.$
wird $u$ ein Max.

29) $u = \sin x \,.\, \cos 2x$; für $x = (2h + \frac{1}{2})\pi$, wird $u = -1$ ein Min.*)
„ $x = (2h - \frac{1}{2})\pi$, „ $u = +1$ „ Max.
für $x = 2h\pi + arc(\sin = \sqrt{\frac{1}{6}})$, wird $u = \frac{1}{9}\sqrt{6}$ ein Max.
„ $x = 2h\pi - arc(\sin = \sqrt{\frac{1}{6}})$, „ $u = -\frac{1}{9}\sqrt{6}$ ein Min.

30) $u = \sin .\, nx \,.\, \sin^n (a + x)$; unter der Voraussetzung, dass $\alpha < \pi$ ist, wird für $x = \frac{\pi - \alpha}{n+1}$ : $u = \sin \frac{n}{n+1}(\pi - \alpha) \sin^n \frac{(\pi + n\alpha)}{n+1}$ ein Max.

31) $u = \cos x \,.\, \sin x^2$; für $x = h\pi$, wird $u = 0$ und zwar ein Min., wenn $h$ gerade und ein Max., wenn $h$ ungerade ist;
für $x = \pm arc\ (\sin = \sqrt{\frac{2}{3}})$, wird $u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Max.

32) $u = \sin x \,.\, \cos(\alpha - x)$; für $x = \frac{1}{2}\alpha + (2h+1)\frac{\pi}{4}$, wird $u = \frac{1}{2}$ $\left\{\sin\alpha + (-1)^h\right\}$ ein Max., wenn $h$ gerade und ein Min., wenn $h$ ungerade ist.

33) $u = e^x \,.\, \sin(x - \alpha)$; für $x = \alpha + (h + \frac{3}{4})\pi$, wird $u = (-1)^h$ $.\sqrt{\frac{1}{2}} \,.\, e^{\alpha + (h + \frac{3}{4})\pi}$ ein Max., wenn $h$ gerade und ein Min., wenn $h$ ungerade ist.

34) $u = \frac{e^x}{\sin(x - \alpha)}$; für $x = \alpha + (h + \frac{1}{4})\pi$, wird $u = (-1)^h \sqrt{2}$ $.e^{\alpha + (h + \frac{1}{4}\pi)}$ ein Max., wenn $h$ ungerade und ein Min., wenn $h$ gerade ist.

35) $u = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$; für $x = 0$, wird $u = 3$ ein Max.
für $x = 2h\pi + arc\left(\cos = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right)$ wird $u = \frac{-17 - 7\sqrt{7}}{27}$ e. Min.
für $x = 2h\pi + arc\left(\cos = \frac{-1 - \sqrt{7}}{6}\right)$ wird $u = \frac{-17 + 7\sqrt{7}}{27}$ e. Max.

36) $u = tg\, x^m \,.\, tg^n (\alpha - x)$; für $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} arc\left(tg = \frac{m-n}{m+n} tg\, \alpha\right)$, wird $u$ ein Max.

---

*) Hier und in dem Folgenden bedeutet $h$ eine beliebige ganze Zahl.

37. Aufg. Eine gerade Linie in zwei solche Theile zu theilen, dass das Rechteck aus beiden Theilen ein Max. sei.

Lös. Die Linie muss halbirt werden.

38. Aufg. Aus zwei gegebenen Seiten das grösstmögliche Dreieck zu bilden.

Lös. Der eingeschlossene Winkel muss ein rechter sein.

39. Aufg. Unter allen Dreiecken, die auf einerlei Grundlinie $g$ stehen und gleichen Umfang $u$ haben, das an Flächeninhalt grösste zu finden.

Lös. Ueber $g$ beschreibt man mit $\frac{1}{2}(u-g)$ ein gleichschenkliges Dreieck.

40. Aufg. Unter allen Dreiecken, welche eine Seite $s$ und den Gegenwinkel $\alpha$ gleich haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Lös. Jeder der Seite $s$ anliegende Winkel ist $=90^0-\frac{1}{2}\alpha$.

41. Aufg. Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $\alpha$ und die Summe der einschliessenden Seiten $=2s$ haben, das grösste zu finden.

Lös. Jede der andern beiden Seiten ist $=s$.

42. Aufg. In den Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks drei solche Punkte zu finden, dass die Verbindungslinien derselben wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden und zwar das kleinstmögliche.

Lös. Die gesuchten drei Punkte sind die Mitten der drei Seiten.

43. Aufg. Unter allen Parallelogrammen mit einem gegebenen Winkel, die man in ein gegebenes Dreieck so einbeschreiben kann, dass eine Seite des Parallelogramms in eine Seite des Dreiecks und die beiden andern Ecken des Parallelogramms in die beiden andern Seiten des Dreiecks fallen, das grösste zu finden.

Lös. Die eine Seite des Parallelogramms ist die Hälfte der Dreiecksseite, auf welcher sie liegt und die Höhe die Hälfte des zugehörigen Höhenperpendikels des Dreiecks.

**Aufg.** Das grösstmögliche Dreieck mit einem gegebenen Winkel in ein gegebenes Dreieck so einzutragen, dass eine Seite des erstern parallel mit einer Seite des letztern geht.

**Lös.** Man zieht in der halben Höhe des gegebenen Dreiecks eine Parallele mit der Grundlinie und beschreibt über dieser Parallele ein Dreieck, welches den gegebenen Winkel entweder als anliegenden oder gegenüberliegenden enthält und dessen dritte Ecke in die Grundlinie fällt.

5. **Aufg.** In dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels sind zwei Punkte durch ihre Entfernungen ($a$ und $b$) von dem Scheitel des Winkels gegeben, man soll in dem andern Schenkel einen solchen Punkt finden, dass die von ihm nach den beiden gegebenen Punkten gezogenen Linien den grösstmöglichen Winkel einschliessen.

**Lös.** Die Entfernung des gesuchten Punkts von dem Scheitel des gegebenen Winkels ist die mittlere Proportionallinie zwischen $a$ und $b$.

16. **Aufg.** Wenn in einer von zwei parallelen Linien zwei Punkte in einer Distanz $= d$ gegeben sind, so soll man in der andern Parallelen einen solchen Punkt finden, dass die von ihm nach den beiden ersten Punkten gezogenen Geraden den grösstmöglichen Winkel einschliessen.

**Lös.** Wenn man in der Mitte der Distanz $d$ ein Perpendikel errichtet, so ist sein Durchschnitt mit der zweiten Parallelen der gesuchte Punkt.

17. **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= 2\alpha$ und denselben Umfang $= 2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

**Lös.** Jede der den Winkel $2\alpha$ einschliessenden Seiten ist $= \frac{s}{1+\sin\alpha}$ und die gegenüberliegende Seite $= \frac{2s.\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

. **Aufg.** Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel $= 2\alpha$ und

denselben Flächeninhalt $= u^2$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Jede der den Winkel $2\alpha$ einschliessenden Seiten ist $= u\sqrt{2 \, . \, cosec\, 2\alpha}$ und die gegenüberliegende Seite $= 2u\sqrt{tang\, \alpha}$.

49. Aufg. Unter allen Dreiecken, welche ein Höhenperpendikel $= h$ und denselben Umfang $= 2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Lös. Jede der Seiten, welche mit dem Höhenperpendikel in eine Spitze zusammenlaufen, ist $= \frac{s^2 + h^2}{2s}$ und die Grundlinie $= \frac{s^2 - h^2}{s}$.

50. Aufg. Unter allen Dreiecken, welche einen Höhenperpendikel $= h$ und denselben Flächeninhalt $= u^2$ haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Jede der Seiten, welche mit dem Höhenperpendikel in eine Spitze zusammenlaufen, ist $= \frac{1}{h}\sqrt{u^4 + h^4}$ und die Grundlinie $= \frac{2u^2}{h}$.

51. Aufg. In einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel so als Peripherie-Winkel einzutragen, dass der von seinen Schenkeln und dem zwischenliegenden Bogen begrenzte Flächenraum ein Max. wird.

Lös. Der Winkel muss so eingetragen werden, dass der nach seinem Scheitel gezogene Radius ihn halbirt.

52. Aufg. In einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel so als Peripherie-Winkel einzutragen, dass der Umfang der von seinen Schenkeln und dem zwischenliegenden Bogen begrenzten Fläche ein Max. werde.

Lös. Der Winkel muss so eingetragen werden, dass der nach seinem Scheitel gezogene Radius ihn halbirt.

**53. Aufg.** Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Umfang $= 2s$, die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

**Lös.** Der Radius des gesuchten Kreises ist $= \frac{s}{2}$, der zugehörige Bogen $= s$ und der Winkel am Mittelpunkt in Graden ausgedrückt $= \frac{360^0}{3.14159..} = 114^0 35' 29'',76..$

**54. Aufg.** Unter allen Kreisausschnitten von gleichem Flächeninhalt $= u^2$, denjenigen zu finden, der den kleinsten Umfang hat.

**Lös.** Der Radius des gesuchten Kreises ist $= u$, d. h. gleich der Seite eines Quadrats, welches den gegebenen Flächeninhalt angiebt, und der Winkel am Mittelpunkt in Graden ausgedrückt, $= \frac{360^0}{3,14159...} = 114^0 35' 29'', 76....$

**55. Aufg.** Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Umfang $2s$ denjenigen zu finden, welcher den grössten Flächeninhalt hat.

**Lös.** Es ist ein ganzer Kreis mit dem Radius

$$= \frac{s}{3,14159...} = s . 0,318309....$$

**56. Aufg.** Unter allen Kreisabschnitten von gleichem Flächeninhalt $= u^2$ denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Umfang hat.

**Lös.** Es ist ein ganzer Kreis mit dem Radius

$$= \frac{u}{\sqrt{3,14159...}} = u . 0,56418....$$

**57. Aufg.** Unter allen Dreiecken, die einen gegebenen Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise umgeschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den grössten oder kleinsten Flächeninhalt hat.

**Lös.** Hier giebt es ein relatives Max. und ein relatives Minimum. Wenn man sich den gegebenen Winkel durch zwei Tangenten an den gegebenen Kreis gebildet denkt, und eine ge-

rade Linie von dem Scheitel des Winkels durch den Mittelpunkt des Kreises zieht, so sind die Durchschnittspunkte dieser Centrallinie mit der Peripherie die Berührungspunkte der dritten Seiten der beiden sich ergebenden Dreiecke. In dem einen Falle wird der Kreis alle drei Seiten des Dreiecks auf der innern Seite berühren und liegt also ganz innerhalb des Dreiecks; in dem andern Falle aber berührt er eine Seite von Aussen und die beiden andern in ihren Verlängerungen.

58. Aufg. Unter denselben Bedingungen, als in der vorigen Aufgabe, soll das Dreieck mit dem grössten oder kleinsten Umfang gefunden werden.

Lös. Es sind dieselben beiden Dreiecke als vorhin.

59. Aufg. Unter den Vierecken, die einen gegebenen Winkel $2\alpha$ haben und einem gegebenen Kreise des Radius $r$ umgeschrieben sind, das grösste oder kleinste zu finden, wenn es zugleich der Bedingung genügt, dass um dasselbe ein Kreis geschrieben werden könne.

Lös. Hier giebt es wieder ein Max. und auch ein Min. Wenn man sich nämlich den gegebenen Winkel $2\alpha$ durch zwei Tangenten an den gegebenen Kreis gebildet denkt, so erhält man das kleinste Viereck, wenn man auf diesen Tangenten selbst von den Berührungspunkten an gerechnet rückwärts den Radius aufträgt und von diesen so erhaltenen Punkten zwei neue Tangenten an den Kreis zieht; und das zweite, das grösste Viereck erhält man, wenn man auf denselben ersten Tangenten auf ihren Verlängerungen von den Berührungspunkten an den Radius aufträgt und von diesen so erhaltenen Punkten Tangenten an den Kreis zieht. Bei dem letzten Viereck berührt der Kreis alle vier Seiten von Innen, liegt also ganz innerhalb des Vierecks, bei dem ersten dagegen berührt er zwei Seiten von Aussen und alle in ihren Verlängerungen. Bei dem kleinsten

Viereck sind je zwei Seiten respective $r\{cotg\ \alpha - 1\}$ und $r\{tg\,\alpha - 1\}$; bei dem grössten dagegen $r\{cotg\,\alpha + 1\}$ und $r\{tg\,\alpha + 1\}$.

Aufg. Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise des Radius $r$ so umgeschrieben sind, dass dieser ganz innerhalb liegt, das kleinste zu finden.

Lös. Erster Fall. Wenn die beiden gegebenen Winkel $2\alpha$ und $2\beta$ an einer Seite liegen, dann ergiebt sich zunächst die Gleichheit der beiden andern Winkel und man erhält für die einzelnen Seiten folgende Ausdrücke:

die Seite, welche zwischen $2\alpha$ und $2\beta$ liegt $= \dfrac{r\,.\,sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta}$,

die Seite, welche zunächst an $2\beta$ liegt $= \dfrac{r\,.\,cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).\,sin\,\beta}$,

" " " " " $2\alpha$ " $= \dfrac{r\,.\,cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).\,sin\,\alpha}$,

" " " der ersten gegenüb. " $= 2r\,.\,tang\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Zweiter Fall. Wenn die beiden gegebenen Winkel $2\alpha$ und $2\gamma$ sich diagonal gegenüber liegen, so sind die beiden andern Winkel zunächst wieder einander gleich und es werden die beiden Seiten, welche den Winkel $2\alpha$ einschliessen $= \dfrac{r\,.\,cos\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{sin\,\alpha\,.\,cos\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$ und die, welche den Winkel $2\beta$ einschliessen $= \dfrac{r\,.\,cos\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{sin\,\gamma\,.\,cos\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$.

61. Aufg. In einer Seite eines gegebenen Dreiecks ist ein Punkt gegeben, man soll von diesem nach zwei zu findenden Punkten in den beiden andern Seiten zwei Linien, die einen gegebenen Winkel $2\lambda$ einschliessen, so ziehn, dass das hierdurch entstandene Dreieck seinem Inhalte nach ein Min. wird.

Lös. Zunächst ergiebt sich, dass die Differenz der beiden Winkel, welche die gesuchten Linien in dem gegebenen Punkt mit der Dreiecksseite bilden, gleich der Differenz der beiden an derselben Seite liegenden Dreieckswinkel ist. Nennt man alsdann $m$ und $n$ die beiden durch den gegebenen Punkt bestimmten Theile der Dreiecksseiten und $2\beta$ und $2\gamma$ die respective dranliegenden Dreieckswinkel, so erhalten die beiden zu ziehenden Linien die Werthe: $\frac{m \sin 2\beta}{\cos(\beta+\gamma-\lambda)}$ und $\frac{n \sin 2\gamma}{\cos(\beta+\gamma-\lambda)}$ und die beiden zunächstliegenden Abschnitte der beiden andern Dreiecksseiten: $\frac{m.\cos(\beta-\gamma+\lambda)}{\cos(\beta+\gamma-\lambda)}$ und $\frac{n.\cos(\gamma-\beta+\lambda)}{\cos(\beta+\gamma-\lambda)}$.

62. Aufg. In einer Ebene sind zwei parallele Linien gegeben, die von einer dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden, ebenso ist ein Punkt in derselben Ebene gegeben; es soll durch diesen eine solche die beiden Parallelen schneidende Gerade gezogen werden, dass das Produkt der Stücke, welche auf diesen Parallelen zwischen dieser neuen und der gegebenen schneidenden Linie liegen, ein Maximum sei.

Lös. Erster Fall. Wenn der gegebene Punkt zwischen beiden Parallelen liegt, so mögen seine senkrechten Abstände von diesen Linien $m$ und $n$ (wobei $m$ grösser als $n$ gedacht wird) und sein senkrechter Abstand von der gegebenen schneidenden Linie $= h$ sein; dann werden die von den Parallelen abgeschnittenen Stücke die Werthe haben:

$\frac{h(m+n)}{2m}$ und $\frac{h(m+n)}{2n}$, und beide werden auf derselben Seite von der gegebenen Schneidenden liegen, auf welcher der gegebene Punkt liegt.

Zweiter Fall. Wenn der gegebene Punkt ausserhalb der beiden Parallelen liegt so seien wieder $m$ und $n$ die senkrechten Abstände von ihnen (wobei wieder $m$ grösser als $n$ angenommen werden mag) und $h$ der Abstand von der Schneidenden; dann werden die Ausdrücke der abgeschnittenen Stücke: $\frac{h(m-n)}{2m}$ und $\frac{h(m-n)}{2n}$, welche hier aber auf verschiedenen Seiten der ursprünglich Schneidenden liegen.

In beiden Fällen wird von derjenigen Parallelen das grössere Stück abgeschnitten, von welcher der gegebene Punkt am weitesten entfernt ist.

!. Aufg. Wenn Alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, so soll die gesuchte Linie so gezogen werden, dass die Summe der Quadrate der abgeschnittenen Stücke ein Max. werde.

Lös. Für den ersten Fall werden die abgeschnittenen Stücke: $\frac{hn(m+n)}{m^2+n^2}$ und $\frac{hm(m+n)}{m^2+n^2}$, welche wieder auf einerlei Seite der Schneidenden liegen; und für den zweiten Fall $\frac{hn(m-n)}{m^2+n^2}$ und $\frac{hm(m-n)}{m^2+n^2}$, welche wie vorhin auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen.

In beiden Fällen unterscheiden sich die gegenwärtigen Resultate von denen in der vorigen Aufgabe dadurch, dass hier auf derjenigen Parallelen das grössere Stück abgeschnitten wird, welcher der gegebene Punkt zunächst liegt.

Aufg. Unter den Vierecken, welche einen gegebenen Winkel $2\alpha$ und einen gegebenen Umfang $2s$ haben und zugleich der Bedingung genügen, dass sowohl in als um dieselben ein Kreis beschrieben werden könne, das grösste zu finden.

Lös. Man erhält ein Viereck, in welchem jede der beiden Seiten, die den Winkel $2\alpha$ einschliessen $= \frac{s}{1+tg\,\alpha}$ und jede der beiden andern Seiten $= \frac{s}{1+cotg\,\alpha}$ ist. Zieht man die Diagonale, welche die Spitze des Winkels $2\alpha$ mit der gegenüberliegenden verbindet, so entsteht auf jeder Seite dieser Diagonale ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der eine der spitzen Winkel $= \alpha$ und die Summe der Katheten $= s$ ist.

65. Aufg. Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Diagonalen $p$ und $q$ haben und einem gegebenen Kreise des Radius $r$ eingeschrieben werden können, das grösste zu finden.

Lös. Zuerst ergiebt sich leicht, dass die beiden Diagonalen auf einander senkrecht stehn müssen. Nennt man ferner $2\alpha$ einen Viereckswinkel, welcher der Diagonale $p$ gegenübersteht und $2\beta$ den Winkel, der $q$ gegenübersteht, so dass $\sin 2\alpha = \frac{p}{2r}$ und $\sin 2\beta = \frac{q}{2r}$, dann ergeben sich folgende Ausdrücke für die Seiten des Vierecks:

die zwischen $2\alpha$ und $2\beta$ liegende wird $= 2r.\cos(\alpha+\beta-45^\circ)$
„ zunächst an $2\beta$ „ „ $= 2r.\sin(\alpha-\beta+45^\circ)$
„ „ „ $2\alpha$ „ „ $= 2r.\sin(\beta-\alpha+45^\circ)$
„ der ersten gegenüberliegende „ $= 2r.\sin(\alpha+\beta-45^\circ)$

Anm. Noch symmetrischer werden diese Ausdrücke, wenn man die Winkel des Vierecks der Reihe nach $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ $2\delta$ nennt, wo also $2\gamma = \pi - 2\alpha$ und $2\delta = \pi - 2\beta$ ist. Man erhält dann die Seite,

welche zwischen $2\alpha$ und $2\beta$ liegt $= 2r.\cos(\alpha+\beta-\frac{1}{4}\pi)$
„ „ $2\beta$ „ $2\gamma$ „ $= 2r.\cos(\beta+\gamma-\frac{1}{4}\pi)$
„ „ $2\gamma$ „ $2\delta$ „ $= 2r.\cos(\gamma+\delta-\frac{1}{4}\pi)$
„ „ $2\delta$ „ $2\alpha$ „ $= 2r.\cos(\delta+\alpha-\frac{1}{4}\pi)$.

66. Aufg. Unter allen Vierecken, welche dieselben Winkel $2\alpha$, $2\beta$,

$2\gamma$, $2\delta$ und denselben Umfang $2s$ haben, das grösste oder kleinste zu finden.

Lös. Wenn alle Ecken des Vierecks ausspringende sind, wenn also jeder Winkel kleiner als $\pi$ ist, so geben die folgenden Ausdrücke der Seiten ein Max., springt aber eine der Ecken ein (mehr als eine Ecke kann aber bekanntlich nicht einspringen), so geben dieselben Werthe ein Min. Es werden nun die Seiten, welche zwischen

$$2\alpha \text{ und } 2\beta \text{ liegt} = \frac{s \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta}{\sqrt{\sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\delta) \cdot \sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\beta+\delta)}}$$

$$2\beta \text{ „ } 2\gamma \text{ „ } = \frac{s \cdot \sin\delta \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\sin(\beta+\delta) \cdot \sin(\beta+\alpha) \cdot \sin(\gamma+\delta) \cdot \sin(\gamma+\alpha)}}$$

$$2\gamma \text{ „ } 2\delta \text{ „ } = \frac{s \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sqrt{\sin(\gamma+\alpha) \cdot \sin(\gamma+\beta) \cdot \sin(\delta+\alpha) \cdot \sin(\delta+\beta)}}$$

$$2\delta \text{ „ } 2\alpha \text{ „ } = \frac{s \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sqrt{\sin(\delta+\beta) \cdot \sin(\delta+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\gamma)}}$$

Anm. Diese Ausdrücke können einfacher und zwar mit rationalen Nennern dargestellt werden, verlieren aber dann die Symmetrie, welche jetzt, wenn man auf die jeder Seite anliegende und gegenüberliegende Winkel achtet, leicht zu erkennen ist.

7. Aufg. Unter allen Paralleltrapezen, in welchen eine der parallelen Seiten gegeben ist und welche einem gegebenen Kreise des Radius $r$ eingeschrieben werden können, das grösste und kleinste zu finden.

Lös. Zunächst ist klar, dass in diesem Paralleltrapez, da es einem Kreise eingeschrieben ist, die beiden nicht parallelen Seiten unter einander gleich sein werden. Denkt man sich dann die gegebene Seite $a$ als Sehne in den gegebenen Kreis eingetragen, so erhält man das grösste oder das kleinste Trapez, je nachdem man den grössern oder den kleinern der beiden Kreisbögen, welche die Sehne von der Peripherie abschneidet, in drei gleiche Theile theilt. Nennt man den zur Sehne $a$ gehörigen Centriwinkel $= 2\alpha$, also

$= a2r\sin\alpha$, so wird jede der drei andern Seiten im grössten Trapez $= 2r\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{3}\right)$ und im kleinsten $= 2r\sin\frac{1}{3}\alpha$. Die Höhe des ersten Trapezes ist $= 2r\cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\alpha) . \cos(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3}\alpha)$ und die des zweiten $= 2r\sin\frac{1}{3}\alpha . \sin\frac{2}{3}\alpha$.

68. Aufg. Ueber dem Durchmesser eines gegebenen Halbkreises sollen zwei sich berührende Halbkreise und ein ganzer Kreis beschrieben werden, welcher sowohl die beiden letztern Halbkreise, als auch den gegebenen Halbkreis berührt. Es sollen die Radien der drei neuen Kreise der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der Flächenraum, welcher übrig bleibt, wenn man die Flächen der gesuchten Halbkreise und des ganzen Kreises von der Fläche des gegebenen Halbkreises abzieht, ein Max. werde.

Lös. Wenn $r$ der Radius des gegebenen Halbkreises ist, so hat jeder der beiden neuen Halbkreise den Radius $\frac{1}{2}r$ und der kleinere ganze Kreis den Radius $\frac{1}{3}r$.

69. Aufg. Es soll das grösste rechtwinklige Parallelepipedum gefunden werden, welches einer Kugel von gegebenem Radius $r$ eingeschrieben werden kann,

a) wenn die Grundfläche ein Quadrat sein soll,

b) wenn die Grundfläche ein Rechteck mit einer gegebenen Seite $= a$ sein soll.

Lös. a) Die Entfernung des die Grundfläche bildenden Schnitts vom Mittelpunkt der Kugel ist $= r\sqrt{\frac{1}{3}}$,

b) Die Entfernung des die Grundfläche bildenden Schnitts vom Mittelpunkt der Kugel ist $= \sqrt{\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}a^2}$.

70. Aufg. Unter den Parallelepipeden, welche denselben cubischen Inhalt, eine gleiche Kante und eine gleiche Ecke haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Wenn der cubische Inhalt $= J$ ist, die gegebene Kante $= r$, die drei ebenen Winkel, welche die gegebene Ecke bilden: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so dass $\alpha$ und $\beta$ die Kante $r$ zum gemeinschaft-

lichen Schenkel haben, so wird bekanntlich das Perpendikel, welches vom Endpunkt der Kante $r$ auf die gegenüberliegende Ebene gefällt wird

$$= \frac{2r}{\sin\gamma}\cdot\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}$$

Wenn man die hier vorkommende Wurzelgrösse durch $R$ bezeichnet, so werden die Werthe der beiden andern Kanten des Parallelepipeds, welches der in der Aufgabe gestellten Bedingung genügt: $\sqrt{\frac{J.\sin\alpha}{r.R.\sin\beta}}$ und $\sqrt{\frac{J.\sin\beta}{r.R.\sin\alpha}}$, wovon die erste den Winkeln $\beta$ und $\gamma$, die zweite den Winkeln $\alpha$ und $\gamma$ zum gemeinschaftlichen Schenkel dient. — Es ergiebt sich hierbei, dass die beiden an der Kante $r$ liegenden Seitenflächen an Flächeninhalt gleich sind.

**71. Aufg.** Unter allen geraden Prismen, deren Höhe $= h$, Grundfläche $= g$ und eine Seitenfläche $= s$ ist, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

**Lös.** Diejenige Seite der Grundfläche, auf welcher die gegebene Seitenfläche steht, ist offenbar $= \frac{s}{h}$, die beiden andern Seiten der Grundfläche des gesuchten Prismas finden sich dann einander gleich, d. h. die beiden nicht gegebenen Seitenflächen sind einander congruent.

**72. Aufg.** Unter allen geraden Cylindern von gleichem kubischen Inhalt $J$, denjenigen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat.

**Lös.** Der Radius der Grundfläche des gesuchten Cylinders wird $= \sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$ und seine Höhe $= 2\sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$ d. h. die Höhe ist dem Durchmesser der Grundfläche gleich. Der Cylinder kann also einem Kubus mit der Kante $2\sqrt[3]{\frac{J}{2\pi}}$ eingeschrieben werden.

73. Aufg. Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche $F$ denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Durchmesser der Grundfläche wird $=2\sqrt{\frac{F}{6\pi}}$ und die Höhe des Cylinders wird ebensogross.

74. Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem kubischen Inhalt $I$ denjenigen zu finden, welcher den kleinsten Mantel hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $=\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}$, die Höhe desselben $=\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$ und die Seitenlinien $=\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi\sqrt{2}}}$, so dass sich das Quadrat des Radius der Grundfläche, zum Quadrat der Höhe, zum Quadrat der Seite $=1:2:3$ verhält.

75. Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem kubischen Inhalt $I$ denjenigen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $=\sqrt[3]{\frac{3I}{2\pi\sqrt{2}}}$, die Höhe $=2\sqrt[3]{\frac{3I}{\pi}}$, die Seitenlinie $=3\sqrt[3]{\frac{3I}{2\pi\sqrt{2}}}$, so dass also die Seitenlinie des Kegels das Dreifache vom Radius der Grundfläche ist. Oder es verhält sich das Quadrat des Radius der Grundfläche, zum Quadrat der Höhe, zum Quadrat der Seite $=1:8:9$.

76. Aufg. Unter allen geraden Kegeln von gleichem Mantel $M$ denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

Lös. Der Radius der Grundfläche wird $=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{M}{\pi}}$, die Höhe $=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{2M}{\pi}}$, die Seite $=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{3M}{\pi}}$, so dass sich die

Quadrate des Radius der Grundfläche, der Höhe und der Seite unter einander $= 1:2:3$ verhalten.

77. **Aufg.** Unter allen geraden Kegeln von gleicher Oberfläche $F$ denjenigen zu finden, der den grössten kubischen Inhalt hat.

**Lös.** Der Radius der Grundfläche wird $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, die Höhe $= \sqrt{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, die Seite $= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$. Die Seite ist das Dreifache von dem Radius der Grundfläche. Das Quadrat des Radius der Grundfläche verhält sich zum Quadrat der Höhe, zum Quadrat der Seite $= 1:8:9$.

78. **Aufg.** Unter allen Kugelabschnitten von dem kubischen Inhalt $I$, die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, für welchen die gesammte Oberfläche (Calotte und begrenzende Kreisfläche) ein Max. wird.

**Lös.** Der Radius der zugehörigen Kugel wird $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$ und die Höhe des Abschnitts $= \sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$. Es wird also die Höhe des Abschnitts dem doppelten Radius oder dem Durchmesser gleich, d. h. man erhält eine ganze Kugel des Radius $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6I}{\pi}}$.

79. **Aufg.** Unter allen Kugelabschnitten mit der gegebenen gesammten Oberfläche $= F$, die bestimmenden Stücke desjenigen zu finden, welcher den grössten kubischen Inhalt hat.

**Lös.** Der Radius der zugehörigen Kugel wird $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, die Höhe des Abschnitts $= \sqrt{\frac{F}{\pi}}$. Es wird also wieder, wie in der vorigen Aufgabe, die Höhe des Abschnitts dem doppelten Radius oder dem Durchmesser gleich, d. h. man erhält eine ganze Kugel des Radius $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

80. **Aufg.** Unter allen Kugelausschnitten von dem kubischen Inhalt $I$ denjenigen zu bestimmen, dessen Oberfläche ein Max. oder Min. wird.

**Lös.** Wenn der Radius der Kugel $=\sqrt[3]{\frac{15I}{2\pi}}$ und die Höhe des zum Kugelausschnitt gehörigen Kugelabschnitts $=\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{15I}{2\pi}}$; wenn sich also der Radius zur Höhe des Abschnitts $=5:1$ verhält, so findet ein Min. statt; — ist dagegen der Radius der Kugel $=\sqrt[3]{\frac{3I}{2\pi}}$ und die Höhe des Abschnittes eben so gross, so erhält man die Halbkugel als Max. Der Centriwinkel des Kugelausschnitts ist so beschaffen, dass im ersten Fall der Cosinus seiner Hälfte $=\frac{4}{5}$ (also der Sinus $=\frac{3}{5}$), im zweiten aber der Cosinus $=0$ (also der Sinus $=1$) ist.

81. **Aufg.** Unter allen Kugelabschnitten mit der gesammten Oberfläche $=F$, denjenigen zu finden, dessen kubischer Inhalt ein Max. oder Min. ist.

**Lös.** Die Antwort ist dieselbe, als bei der vorigen Aufgabe, nur dass hier ein Max. stattfindet, wo dort ein Min. war, und umgekehrt.

82. **Aufg.** In einen gegebenen geraden Kegel den seinem kubischen Inhalte nach grössten Cylinder einzubeschreiben.

**Lös.** Wenn der Radius der Grundfläche des gegebenen Kegels $=r$, die Höhe desselben $=h$ ist, so wird der Radius der beiden Endflächen des gesuchten Cylinders $=\frac{2}{3}r$ und seine Höhe $=\frac{1}{3}h$.

83. **Aufg.** In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Cylinder einzubeschreiben, welcher die grösste krumme Oberfläche hat.

**Lös.** Bei derselben Bezeichnung wie in der vorigen Aufgabe wird der Radius der beiden Endflächen des Cylinders $=\frac{1}{2}r$ und seine Höhe $=\frac{1}{2}h$.

**84. Aufg.** In einen gegebenen geraden Kegel denjenigen Cylinder einzubeschreiben, dessen gesammte Begrenzungsflächen ein Max. bilden.

**Lös.** Unter der Voraussetzung, dass die Höhe des Kegels grösser ist, als der Radius seiner Grundfläche, wird der Radius der beiden Endflächen des Cylinders $= \frac{r \cdot h}{2 \cdot (h-r)}$ und seine Höhe $= \frac{h \cdot (h-2r)}{2 \cdot (h-r)}$.

**85. Aufg.** In eine gegebene Kugel den, seinem kubischen Inhalt nach, grössten Cylinder einzubeschreiben.

**Lös.** Wenn der Radius der Kugel $= r$ ist, so wird der Radius der beiden Endflächen des Cylinders $= r\sqrt{\frac{2}{3}}$ und seine Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

**86. Aufg.** In eine gegebene Kugel einen Cylinder einzubeschreiben, dessen krumme Oberfläche ein Max. ist.

**Lös.** Der Radius der beiden Endflächen des gesuchten Cylinders ist $= r \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ und seine Höhe $= r\sqrt{2}$.

**87. Aufg.** In eine gegebene Kugel einen Cylinder einzubeschreiben, dessen gesammte Begrenzungsfläche ein Max. wird.

**Lös.** Der Radius der beiden Endflächen des Cylinders ist $= r\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}}$ und seine Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

**88. Aufg.** In eine gegebene Kugel den seinem kubischen Inhalte nach grössten Kegel einzubeschreiben.

**Lös.** Der Radius der Grundfläche des gesuchten Kegels wird $= \frac{2}{3} r\sqrt{3}$ und seine Höhe $= \frac{4}{3} r$.

**89. Aufg.** In eine gegebene Kugel denjenigen Kegel einzubeschreiben, welcher die grösste krumme Oberfläche hat.

**Lös.** Derselbe Kegel, wie in der vorigen Aufgabe.

**90. Aufg.** In eine gegebene Kugel denjenigen Kegel einzuschreiben, dessen gesammte Begrenzung ein Max. ist.

Lös. Die Höhe des gesuchten Kegels wird $= \frac{r(23-\sqrt{17})}{16}$ $= r.1,179806..$ und der Radius der Grundfläche $= r.0,967669..$

91. Aufg. Unter allen sphärischen Dreiecken mit einem gegebenen Winkel $\alpha$ (welcher $< \pi$ sein soll) und einem gegebenen Flächeninhalt $a$, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Lös. Die beiden andern Winkel werden unter einander gleich und zwar jeder $= \frac{a+\pi-\alpha}{2}$. Die dem Winkel $\alpha$ gegenüberliegende Seite erhält dann für ihren Cosinus den Ausdruck

$$= \frac{\cos\alpha + \cos^2\left(\frac{a+\pi-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{a+\pi-\alpha}{2}\right)},$$

welcher als Cosinus $< 1$ sein muss, woraus sich die Bedingung ergiebt $a \overline{\overline{<}} 2\alpha$. Für den Cosinus jeder der beiden andern Seiten erhält man $= \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha . \operatorname{cotg}\left(\frac{a+\pi-\alpha}{2}\right)$.

92. Aufg. Unter allen sphärischen Dreiecken von einem gegebenen Flächeninhalt $= a$, dasjenige zu finden, dessen Umfang ein Min. ist.

Lös. Wie gross man sich auch den einen Winkel des gesuchten Dreiecks denken mag, immer müssen die beiden andern Winkel unter einander gleich sein. Hier ergiebt sich, dass alle drei Winkel unter einander gleich sein müssen und zwar jeder $= \frac{a+\pi}{3}$ und ebenso auch alle Seiten einander gleich und zwar wird der Cosinus der Hälfte jeder Seite $= \frac{1}{2\sin\frac{a+\pi}{6}}$.

93. Aufg. Auf einer Kugel sind zwei Parallelkreise gegeben, so wie

auch der Pol eines dritten die beiden ersten schneidenden Kreises; es soll dieser dritte so bestimmt werden, dass die Sehne in ihm, welche seine Durchschnittspunkte mit den beiden gegebenen Kreisen verbindet, ein Min. sei.

**Lös.** Denkt man sich durch den bekannten Pol der beiden gegebenen Parallelkreise und durch den gegebenen Pol des gesuchten dritten Kreises einen grössten Kugelkreis gelegt, so werden zur Bestimmung der gegenseitigen Lage in diesem folgende Bögen bekannt sein: 1) der Bogen zwischen dem gemeinsamen Pol der Parallelkreise und dem ersten Parallelkreise $= \beta$, 2) der Bogen zwischen demselben Pol und dem zweiten $= \alpha$, wobei $\alpha > \beta$ sein soll, und 3) der Bogen zwischen demselben Pol und dem gegebenen Pol des gesuchten dritten Kreises $= \delta$. Nennt man nun den Bogen zwischen dem zweiten gegebenen Pol und seinem zugehörigen gesuchten dritten Kreis $= x$, so wird 1) wenn $\delta > \frac{\alpha + \beta}{2}$ ist, für $\cos x = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \delta}$ die Sehne $= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \delta}$ ein Min. 2) wenn $\delta > \frac{\alpha + \beta}{2}$ ist, für $\cos x = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \,.\, \cos \delta$ die Sehne $= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ein Min.

**4. Aufg.** In eine gegebene Kugel soll das grösstmögliche Parallelepipedum eingeschrieben werden.

**Lös.** Wenn $r$ der Radius der Kugel ist, so werden jede der drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelepipedums $= 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

**35. Aufg.** Zu drei gegebenen Punkten soll in derselben Ebene ein vierter gefunden werden, so dass die Summe der Entfernungen desselben von den drei ersten ein Min. werde.

**Lös.** Wenn man die drei gegebenen Punkte durch grade Linien unter einander verbindet, so entsteht ein Dreieck, dessen

Winkel $A$, $B$, $C$ und die gegenüberliegenden Seiten respective $a$, $b$, $c$ sein mögen. Wenn man über jeder der drei Seiten $a$, $b$, $c$ einen Kreisbogen beschreibt, der die Fähigkeit hat, einen Winkel von 120° als Peripheriewinkel zu enthalten, so schneiden sich diese Bögen in einem einzigen und zwar in dem gesuchten Punkt.

Die einzelnen Linien, welche von dem gesuchten Punkt nach den Ecken des Dreiecks gezogen werden, erhalten folgende Werthe:

$$\frac{b.c.\sin(60^0+A)}{\sin 60^0.\sqrt{b^2+c^2-2bc.\cos(60^0+A)}}$$

$$\frac{c.a.\sin(60^0+B)}{\sin 60^0.\sqrt{c^2+a^2-2ca.\cos(60^0+B)}}$$

$$\frac{a.b.\sin(60^0+C)}{\sin 60^0.\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos(60^0+C)}}$$

Die Summe aller drei Linien, welche ein Min. wird, ist

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\sin 60^0\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

96. **Aufg.** Zu vier gegebenen Punkten soll ein fünfter von der Beschaffenheit gefunden werden, dass die Summe der Entfernungen desselben von den ersten ein Min. wird.

**Lös.** Wenn man die vier gegebenen Punkte durch gerade Linien unter einander verbindet, so dass ein Viereck entsteht, so ist der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen der gesuchte.

97. **Aufg.** Auf den drei Seiten eines Dreiecks $ABC$ sollen drei Punkte $M$, $N$, $P$ gefunden werden, so dass das Dreieck $MNP$ ein Max. oder Min. werde.

**Lös.** Wenn $M$, $N$ und $P$ respective die Mitten der Seiten $AB$, $AC$ und $BC$ sind, so ist $\triangle MNP = \frac{1}{4}.\triangle ABC$; und zwar entweder ein Max. oder ein Min. Denkt man sich nämlich den Punkt $M$, die Mitte von $AB$, so wird bei dem ausgezeichneten Dreieck $\angle PMB = \angle A$, $\angle NMA = \angle B$.

Jedes andere Dreieck, welches seinen Scheitel in demselben Punkt $M$ hat, bei welchem aber die Winkel $PMB$ und $NMA$ beide zugleich grösser oder beide zugleich kleiner als $A$ und $B$ sind, wird kleiner als das Dreieck $MNP$ sein; dagegen jedes Dreieck mit demselben Scheitel, bei welchem $PMB$ grösser oder kleiner als $A$ und $NMA$ kleiner oder grösser als $B$ ist, wird grösser als das ausgezeichnete Dreieck $MNP$.

8. Aufg. Auf den drei Seiten eines Dreiecks $ABC$ sollen drei Punkte $M$, $N$ und $P$ gefunden werden, so dass der Umfang des Dreiecks $MNP$ ein Min. wird.

Lös. Man fällt von den drei Eckpunkten des gegebenen Dreiecks Perpendikel auf die Gegenseiten, dann werden die Verbindungslinien der Fusspunkte derselben das gesuchte Dreieck bilden. — Dieses ist aber nur möglich, wenn alle drei Winkel des gegebenen Dreiecks spitze sind; in andern Fällen erhält man weder ein Max. noch ein Min.

9. Aufg. Durch einen in der Axe einer Parabel gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehn.

Lös. Die auf der Axe senkrecht stehende Sehne wird die kleinste.

00. Aufg. In ein Parabelsegment, welches durch eine auf der Axe senkrecht stehende Sehne abgeschnitten wird, soll das grösste rechtwinklige Parallelogramm eingeschrieben werden.

Lös. Wenn $a$ die Entfernung der gegebenen Sehne vom Scheitel und $b$ die halbe Sehne ist, so sind $\frac{2a}{3}$ und $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ die beiden Seiten des gesuchten Parallelogramms, dessen Flächeninhalt $= \frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot ab$ ein Max. ist.

01. Aufg. Zwei Durchmesser einer Ellipse schneiden sich unter einem gegebenen spitzen Winkel $\alpha$, man soll ihre Grösse und Lage so bestimmen, dass das Parallelogramm, dessen Diagonalen sie sind, ein Max. oder Min. werde.

Lös. Wenn man $\alpha$ den spitzen Winkel zwischen den beiden Durchmessern der Ellipse nennt, ferner $a$ die halbe grosse Axe und $e$ das Verhältniss der Excentricität zur grossen Axe, so wird, wenn man den Neigungswinkel des einen Durchmessers gegen die grosse Axe $= \frac{\alpha}{2}$ macht, der Flächeninhalt des Parallelogramms $= \frac{4a^2 . tg\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{1}{1-e^2}tg^2\frac{\alpha}{2}}$ und dieser wird ein Min., wenn $tg\frac{\alpha}{2} < \sqrt{1-e^2}$ und ein Max., wenn $tg\frac{\alpha}{2} > \sqrt{1-e^2}$ ist. Macht man ferner den Neigungswinkel des einen Durchmessers gegen die grosse Axe $= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} arc\left(cos = \frac{2-e^2}{e^2} . cos\,\alpha\right)$, so wird die Fläche ein Max.; wählt man hierbei noch den Winkel $\alpha$ so, dass $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-e^2}$ ist, so wird die Fläche $= 2a^2\sqrt{1-e^2}$ ein Max.

102. Aufg. In der Peripherie einer Ellipse sind zwei Punkte gegeben, man soll einen dritten so bestimmen, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks ein Max. oder Min. wird.

Lös. Wenn der erste Punkt durch die rechtwinkligen Coordinaten $\alpha'$ und $\beta'$, der zweite durch $\alpha''$ und $\beta''$ gegeben sind, wenn ferner $a$ die halbe grosse Axe und $e$ das Verhältniss der Excentricität der Ellipse zur grossen Axe bedeutet, so dass ihre Gleichung wird: $y = \pm\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-x^2}$; dann wird die Abscisse des dritten Eckpunkts des gesuchten grössten Dreiecks $= \frac{a.(\beta'-\beta'')}{\sqrt{(\beta'-\beta'')^2+(1-e^2)(\alpha'-\alpha'')^2}}$, wozu natürlich zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe der Ordinate gehören, so dass zwei Dreiecke erhalten werden.

. **Aufg.** In eine gegebene Ellipse soll das grösste Parallelogramm eingeschrieben werden, welches einen gegebenen spitzen Winkel $\alpha$ enthält.

**Lös.** Wenn man wieder die halbe grosse Axe der Ellipse $a$ nennt und $e$ das Verhältniss ihrer Excentricität zur grossen Axe, wenn man ferner die Ellipse so gezeichnet denkt, dass die grosse Axe eine horizontale Lage hat, wenn der Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so wird $y = \pm\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-x^2}$ die Gleichung der Ellipse, wobei wir noch annehmen wollen, dass die positiven Ordinaten oberhalb der grossen Axe, die negativen unterhalb liegen sollen, so wie die positiven Abscissen rechts von der kleinen Axe, die negativen links. Unter diesen Voraussetzungen werden die vier Endpunkte des gesuchten grössten Parallelogramms:

$$x_1 = +a\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1-e^2}{e^2}cotg\alpha};\ y_1 = +a\sqrt{1-e^2}\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1-e^2}{e^2}cotg\,\alpha}$$

$$x_2 = -a\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1-e^2}{e^2}cotg\alpha};\ y_2 = -a\sqrt{1-e^2}\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1-e^2}{e^2}cotg\,\alpha}$$

$$x_3 = -a\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1-e^2}{e^2}cotg\alpha};\ y_3 = +a\sqrt{1-e^2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1-e^2}{e^2}cotg\,\alpha}$$

$$x_4 = +a\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1-e^2}{e^2}cotg\alpha};\ y_4 = -a\sqrt{1-e^2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1-e^2}{e^2}cotg\,\alpha}$$

Aus den beiden letzten Coordinaten-Werthen folgt noch beiläufig, dass es für $\alpha$ einen Grenzwerth giebt, dass nämlich immer $tang\,\alpha \geqq \frac{2(1-e^2)}{e^2}$ sein muss.

04. **Aufg.** In eine gegebene Ellipse soll das grösste Dreieck eingeschrieben werden.

**Lös.** Es finden zwei Maxima statt: 1) wenn man in der Mitte der einen kleinen Halbaxe eine Parallele mit der grossen Axe zieht und die Durchschnittspunkte in der Peripherie der Ellipse mit dem Endpunkt der andern kleinen Halbaxe verbindet; 2) wenn man in der Mitte der einen gros-

sen Halbaxe eine Parallele mit der kleinen Axe legt und die Durchschnittspunkte mit dem Endpunkt der andern grossen Halbaxe verbindet. — In beiden Fällen erhält man ein Dreieck von demselben Flächeninhalt, nämlich $= \frac{3}{4}\sqrt{3}\,.\,a.b$, wenn $a$ und $b$ die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse bedeuten.

105. Aufg. Um ein gegebenes Dreieck soll die, ihrem Flächeninhalt nach, kleinste Ellipse beschrieben werden.

Lös. Wenn man sich das Dreieck gegeben denkt durch zwei Seiten $a$ und $b$ und den eingeschlossenen Winkel $\gamma$, so wird die Fläche der kleinsten umgeschriebenen Ellipse $= \frac{2\pi a b . \sin\gamma}{3\sqrt{3}}$, ihr Mittelpunkt liegt im Schwerpunkt des Dreiecks und ihre beiden rechtwinkligen Halbaxen werden:

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(\gamma-30^0)}+\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\gamma+30^0)}$$

und $\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin(\gamma-30^0)}-\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\gamma+30^0)}$

106. Aufg. In ein gegebenes Dreieck soll die grösste Ellipse eingeschrieben werden.

Lös. Wenn man sich das Dreieck wieder gegeben denkt durch zwei Seiten $a$ und $b$ und den eingeschlossenen Winkel $\gamma$, so ist der Flächeninhalt der grössten Ellipse $= \frac{1}{6\sqrt{3}}\pi ab . \sin\gamma$, ihr Mittelpunkt ist wieder der Schwerpunkt des Dreiecks und ihre beiden rechtwinkligen Halbaxen werden:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2-ab\,.\,\cos\gamma+\sqrt{(a^2+b^2-ab\,.\cos\gamma)^2-3a^2b^2.\sin\gamma^2}}$$

und

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2-ab\cos\gamma-\sqrt{(a^2+b^2-ab\cos\gamma)^2-3a^2b^2\sin\gamma^2}}$$

Die Berührungspunkte endlich sind die Mittelpunkte der drei Seiten.

# VI. Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung der Curven und Oberflächen.

## §. 11.

Wenn eine Gleichung zwischen den beiden rechtwinkligen Coordinaten $x$ und $y$, d. h. also wenn die Gleichung einer ebenen Curve $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ gegeben ist, so wird die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührende eines Punkts der Curve mit der X. Axe bildet, $= \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ oder $= -\frac{\left[\frac{d\varphi(x,y)}{dx}\right]}{\left[\frac{d\varphi(x,y)}{dy}\right]}$, wenn man darin nach der Differentiation für $x$ und $y$ die zusammengehörigen Coordinaten des Berührungspunkts einsetzt und wenn die in eckige Klammern eingeschlossenen Differentialquotienten wieder, wie schon früher, partielle Differentialquotienten bedeuten.

Die trigonometrische Tangente des Winkels, den zwei Curven $y = f(x)$ und $\eta = \varphi(\xi)$ mit einander bilden, ist $= \frac{\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{dy}{dx}}$, wenn man nach der Differentiation für $\xi$ und $\eta$ sowohl, als für $x$ und $y$ die Coordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts beider Curven einsetzt.

Die Gleichung der Tangente ergibt sich, wenn man die laufenden Coordinaten durch $\xi$ und $\eta$ bezeichnet:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

worin für $x$ und $y$ nach der Differentiation die speciellen Werthe der Coordinaten des Berührungspunkts eingesetzt werden müssen.

Unter denselben Voraussetzungen wird die Gleichung der Normale:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x)$$

Das begrenzte Stück der berührenden Linie, welches zwischen dem Berührungspunkt und dem Durchschnittspunkt mit der X Axe liegt und

geradezu Tangente der Curve genannt wird, hat zum analytischen Ausdruck : $y.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$; ferner die Subtangente, d. h. derjenige Theil der X Axe, welcher zwischen dem so eben genannten Durchschnittspunkt und dem Fusspunkt der Ordinate liegt, ist $=y.\frac{dx}{dy}$; sodann das Stück der Normale, welches zwischen ihrem Durchschnittspunkt mit der X Axe und dem Berührungspunkt der Tangente liegt, und welches geradezu Normale der Curve heisst, ist $=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; endlich der Theil der X Axe, der zwischen dem so eben genannten Durchschnittspunkt und dem Fusspunkt der Ordinate liegt und Subnormale heisst, ist $=y.\frac{dy}{dx}$. Wenn man in diesen angeführten Ausdrücken die Coordinaten unter einander vertauscht, erhält man die analogen Grössen, nur bezüglich auf die $Y$ Axe.

Wenn eine Curve unendliche Aeste hat und dabei so beschaffen ist, dass die Tangenten für ihre aufeinander folgenden Punkte sich immer mehr und mehr einer bestimmten festen geraden Linie nähern, je weiter man in der Curve fortschreitet, d. h. wenn die Gleichung der Tangente $\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x)$ bei dem beständigen Wachsen des $x$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so heisst diese Grenzlinie die Asymptote der Curve. Man wird erfahren, ob eine Curve Asymptoten hat oder nicht, wenn man die Abschnitte der Tangente von den Coordinatenaxen, d. h. die Ausdrücke $y-x.\frac{dy}{dx}$ und $x-y.\frac{dx}{dy}$ in sofern untersucht, ob sie endliche Werthe erhalten, wenn man das $x$ bis ins Unendliche wachsen lässt.

Die Natur der Krümmung einer Curve, d. h. die Frage, ob sie an einer gewissen, zu den Coordinaten $x$, $y$ gehörigen Stelle ihre convexe oder ihre concave Seite der X Axe zuwendet, wird dadurch entschieden, ob die zugehörige Ordinate $y$ und ihr zweiter Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen

haben. Ganz analog erkennt man die Krümmung der Curve, bezüglich auf die $Y$ Axe, wenn man die Zeichen der Grössen $x$ und $\frac{d^2 x}{d y^2}$ oder $x$ und $-\frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\left(\frac{d y}{d x}\right)^3}$ mit einander vergleicht.

Wenn man zwei Curven durch ihre Gleichungen $y = f(x)$ und $\eta = \varphi(\xi)$ gegeben hat, und wenn zu einem gewissen $\xi = x$ auch gleiche Werthe der Ordinaten gehören, so haben beide Curven einen Punkt miteinander gemein; sind ausserdem unter derselben Bedingung $\xi = x$ auch noch die ersten Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$ und $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, so sagt man, die Curven haben eine Berührung der ersten Ordnung u. s. w., im Allgemeinen, wenn bei $\xi = x$ noch $\eta = y$, $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2 y}{d x^2}$, .... $\frac{d^n \eta}{d \xi^n} = \frac{d^n y}{d x^n}$ wird, so haben die beiden Curven eine Berührung der $n$ten Ordnung. Umgekehrt wird man die speciellen Dimensionen einer Curve, deren allgemeine Natur man angenommen hat, so bestimmen können, dass sie mit einer andern, vollständig gegebenen Curve eine Berührung der $n$ten Ordnung hat, wenn in ihr $n+1$ Constante enthalten sind, über deren speciellen Werth man verfügen darf. Die einfachste Berührung ist die schon oben erwähnte geradlinige Tangente, d. h. eine Berührung der ersten Ordnung. Die nächste ist die Berührung der zweiten Ordnung, wo also unter der Voraussetzung $\xi = x$ auch noch $\eta = y$, $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2 y}{d x^2}$ ist. Da drei Bedingungsgleichungen existiren, so wird man über drei Grössen so verfügen können, dass ihnen genügt wird. Nun ist aber der Kreis eine Curve, welche drei Constante (die beiden Coordinaten des Mittelpunkts und den Radius) enthält, es wird also der Kreis mit einer gegebenen Curve eine Berührung der zweiten Ordnung haben können. Diesen Kreis nennt man den Krümmungskreis, seinen Radius den Krümmungshalbmesser und seinen Mittelpunkt den

**Krümmungsmittelpunkt.** Wenn die Gleichung irgend einer Curve $y = f(x)$ gegeben ist, so wird die allgemeine Gleichung des Kreises $(\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2 = \varrho^2$ die des Krümmungskreises, wenn die Coordinaten seines Mittelpunkts

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

und sein Radius

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

werden. — Der Krümmungsmittelpunkt kann auch als der Durchschnittspunkt zweier Normalen betrachtet werden, die zu zwei auf einander folgenden Punkten der Curve gehören. Denkt man sich nun für die auf einander folgenden Punkte einer Curve in ihrer Continuität die Krümmungskreise bestimmt und construirt, so werden auch die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ein Continuum, d. h. eine Curve bilden. Diese Curve heisst die **abgewickelte** Curve (développée) oder **Evolute**, die ursprünglich gegebene dagegen $y = f(x)$ die **Abwickelungscurve** (développante) oder **Evolvente.** Die Gleichung der Evolute wird gefunden, wenn man aus den vorhin gefundenen Werthen für $\alpha$ und $\beta$ mit Hilfe der Gleichung $y = f(x)$ die Grössen $x$ und $y$ herauseliminirt, so dass nur eine Gleichung zwischen $\alpha$ und $\beta$ den Coordinaten der Mittelpunkte der Krümmungskreise übrig bleibt. Die Normale der Evolvente ist zugleich Tangente der Evolute und weil, wie sich leicht ergiebt, $d\varrho = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$ ist, so folgt, dass der Unterschied zweier in beliebigem Zwischenraum liegenden Tangenten der Evolute gleich der Länge des zwischen den beiden Berührungspunkten liegenden Bogens ist.

Wenn die Gleichung einer Curve in Polar-Coordinaten $f(r,\varphi)=0$ eben ist, so erhält man leicht sämmtliche bisher angeführte Grös-, wenn man in ihren Ausdrücken nur

$$x = r.\cos\varphi,\ y = r.\sin\varphi,\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi.\frac{dr}{d\varphi} + r.\cos\varphi}{\cos\varphi.\frac{dr}{d\varphi} - r.\sin\varphi}$$ setzt, wobei $r$

n radius vector und $\varphi$ die amplitudo bedeutet. Es wird alsdann:

$$\text{die Subtangente} = r.\sin\varphi.\frac{\cos\varphi.\frac{dr}{d\varphi} - r.\sin\varphi}{\sin\varphi.\frac{dr}{d\varphi} + r.\cos\varphi}$$

$$\text{die Subnormale} = r.\sin\varphi.\frac{\sin\varphi.\frac{dr}{d\varphi} + r.\cos\varphi}{\cos\varphi.\frac{dr}{d\varphi} - r.\sin\varphi}$$

e Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts

$$\alpha = r.\cos\varphi - \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}.\left\{r.\cos\varphi + \sin\varphi.\frac{dr}{d\varphi}\right\}}{r^2 + 2.\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

$$\beta = r.\sin\varphi - \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}.\left\{r.\sin\varphi - \cos\varphi.\frac{dr}{d\varphi}\right\}}{r^2 + 2.\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

ner der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}^{3/2}}{r^2 + 2.\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Wenn eine krumme Oberfläche $z = f(x,y)$ gegeben ist, so wird Gleichung der Tangentenebene:

$$\zeta - z = (\xi - x).\frac{dz}{dx} + (\eta - y).\frac{dz}{dy}$$

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ die laufenden Coordinaten der Ebene sind, und worin ch der Differentiation für $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Berührungs-

punkts einzusetzen sind. Die Neigungswinkel der Tangentenel (welche durch I bezeichnet werden mag) gegen die Coordinateneb werden:

$$\cos(I.yz) = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$\cos(I.xz) = \frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$\cos(I.xy) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Die Gleichung der Normale wird

$$\xi - x = -(\zeta - z) . \frac{dz}{dx}$$

$$\eta - y = -(\zeta - z) . \frac{dz}{dy}.$$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkt bis zur

Ebene der $yz$ wird $= x . \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$

„ „ $xz$ „ $= y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$

„ „ $xy$ „ $= z . \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$

Die Gleichung der Berührungskugel, deren Mittelpunktscoordi ten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und deren Radius $\varrho$ sein mag, wird

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2=\varrho^2$$

und es ist:

$$\alpha = x + \frac{\varrho . \frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$\beta = y + \frac{\varrho \cdot \frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

$$\gamma = z - \frac{\varrho}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

Der Radius der Kugel bleibt unbestimmt, weil es unendlich viele Kugeln giebt, welche mit einer Oberfläche eine gemeinsame Tangenten-Ebene, d. h. eine Berührung der ersten Ordnung haben. Eine vollständige Berührung der zweiten Ordnung lässt sich mit der Kugel nicht erzielen, da sie nur vier Constante in ihrer Gleichung enthält und bei einer vollständigen Berührung der zweiten Ordnung sechs Bedingungsgleichungen genügt werden muss, nämlich, wenn die Gleichung der Oberfläche $z = f(x, y)$ ist:

$$z = \zeta, \frac{dz}{dx} = \frac{d\zeta}{d\xi}, \frac{dz}{dy} = \frac{d\zeta}{d\eta}, \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\zeta}{d\xi^2}, \frac{d^2z}{dx \cdot dy} = \frac{d^2\zeta}{d\xi \cdot d\eta}, \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2\zeta}{d\eta^2}.$$

Man kann aber doch eine Kugel finden, welche mit einer gegebenen Oberfläche eine Berührung der zweiten Ordnung in sofern hat, dass ausser der Erfüllung der drei ersten genannten Bedingungen noch die Summe der drei Glieder zweiter Dimension, bezüglich auf die gegebene Oberfläche und bezüglich auf die Kugel einander gleich werden. Man hat alsdann, wenn man $\frac{dy}{dx} = \omega$ setzt, folgender Bedingungsgleichung zu genügen:

$$\left\{\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right\} + 2\omega \cdot \left\{\frac{d^2\zeta}{d\xi \cdot d\eta} - \frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right\} + \omega^2 \left\{\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right\} = 0$$

Weil nun das $\omega$ oder $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, welchen die Knotenlinie einer Ebene, die man durch die Oberfläche senkrecht auf die $xy$ Ebene legt, mit der $X$ Axe bildet, so wird dieses $\omega$, dem man einen beliebigen Werth beilegen darf, die Richtung angeben, in welcher bei Erfüllung der genannten Bedingung die Kugel mit der Oberfläche eine Berührung der zweiten Ordnung hat. Unter allen diesen möglichen Werthen giebt es zwei, die

besonders bemerkenswerth sind, nämlich die, welche den Radius der Berührungs-Kugel zu einem Maximum und zu einem Minimum machen, d. h. die, welche den Sinn angeben, in welchem die geringste und die stärkste Krümmung der Oberfläche stattfindet. Setzt man der Kürze wegen: $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{d^2z}{dx.dy} = s$, $\frac{d^2z}{dy^2} = t$

$$(1+q^2)s - pqt = A$$
$$(1+q^2)r - (1+p^2)t = B$$
$$(1+p^2)s - pqr = C$$
$$(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs = D$$

so werden die beiden Werthe von $\omega$ diese:

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

und die zugehörigen Werthe des Krümmungshalbmessers:

$$\varrho = \frac{\left\{-D \pm \sqrt{B^2 + 4AC}\right\} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{2(rt - s^2)}$$

Die beiden Curven, welche hierbei auf der Oberfläche bestimmt werden und welche die Curven der grössten und kleinsten Krümmung genannt werden, haben die merkwürdige Eigenschaft, dass sie auf einander senkrecht stehn.

Wenn man zwei Oberflächen $F(x,y,z) = 0$ und $f(x,y,z) = 0$ als coëxistirend annimmt, so erhält man im Allgemeinen, als ihren Durchschnitt, eine Curve doppelter Krümmung. Denkt man sich aus den beiden Gleichungen einmal $y$ und dann $z$ herauseliminirt, so kann man als bequemere Form für die Gleichung der Curve doppelter Krümmung erhalten $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Die Gleichungen einer Tangente an diese Curve werden:

$$\eta - y = (\xi - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\zeta - z = (\xi - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

Wenn man die Gerade sucht, welche in einem bestimmten Punkt $x$, $y$, $z$ auf der Curve senkrecht steht, so ergiebt sich natürlich sehr

bald, dass man nicht eine einzelne Normale, sondern eine ganze **Normalebene** erhalten muss, deren Gleichung ist:

$$(\zeta - z)\cdot\frac{dz}{dx} + (\eta - y)\frac{dy}{dx} + (\xi - x) = 0.$$

Sucht man den Kreis, welcher mit der Curve doppelter Krümmung eine Berührung zweiter Ordnung hat, so möge derselbe als der Durchschnitt einer Kugel

$$\varrho^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2$$

und einer durch deren Mittelpunkt $a, b, c$ gelegten Ebene

$$\xi - a + (\eta - b)A + (\zeta - c)B = 0$$

betrachtet werden. Soll nun eine Berührung zweiter Ordnung stattfinden, so müssen nicht allein diese Gleichungen selbst, sondern auch ihre beiden ersten Differentiale richtig bleiben, wenn man in ihnen die Coordinaten $x, y, z$ des Berührungspunkts der Curve einsetzt, so dass man erhält, wenn man durchaus kein Differential als constant annimmt:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \varrho^2$$
$$x - a + (y - b)A + (z - c)B = 0$$
$$(x - a).dx + (y - b).dy + (z - c).dz = 0$$
$$dx + A.dy + B.dz = 0$$
$$(x - a).d^2x + (y - b).d^2y + (z - c).d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$
$$d^2x + A.d^2y + B.d^2z = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$A = \frac{dz.d^2x - dx.d^2z}{dy.d^2z - dz.d^2y}$$

$$B = \frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{dy.d^2z - dz.d^2y}$$

und wenn man der Kürze wegen setzt: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ und $M = ds^2\left\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right\} - \left\{dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z\right\}^2$:

$$a - x = \frac{ds^2}{M}.\left\{(dy^2 + dz^2)\,d^2x - (dy.d^2y + dz.d^2z)\,dx\right\}$$

$$b - y = \frac{ds^2}{M}.\left\{(dx^2 + dz^2)\,d^2y - (dx.d^2x + dz.d^2z)\,dy\right\}$$

$$c - z = \frac{ds^2}{M} . \left\{ (dx^2 + dy^2) d^2 z - (dx . d^2 x + dy . d^2 y) dz \right\}$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy . d^2 z - dz . d^2 y)^2 + (dz . d^2 x - dx . d^2 z)^2 + (dx . d^2 y - dy . d^2 x)^2}}$$

Etwas vollkommen Verschiedenes von dem, wovon soeben die Rede gewesen ist, d. h. verschieden von der Berührung zweier Curven oder Flächen, ist das Verhältniss der sogenannten eingehüllten und einhüllenden Curven oder Flächen. Wenn man zunächst eine ebene Curve $U = f(x, y) = 0$ hat, so kommt dieser eine bestimmte Natur zu, welche durch die Beschaffenheit der Funktion $f$ bedingt wird; ihre Dimension dagegen ist nur abhängig von den Zahlenwerthen der einzelnen, in der Gleichung der Curve enthaltenen Constanten, oder von den sogenannten Parametern. — Denkt man sich nun irgend einen dieser Parameter, den man $\alpha$ nennen mag, in dem Zustande der beständigen allmäligen Aenderung, so wird man ebenso beständig Curven derselben Natur, aber verschiedener specieller Lage und Dimension erhalten. Denkt man sich also dem Parameter $\alpha$ einen speciellen Zahlenwerth beigelegt, so erhält man eine ganz bestimmte specielle Curve, ändert man aber nun dieses $\alpha$, so erhält man eine neue Curve, zwar von derselben Natur, aber in andrer Lage und diese wird die vorige in einem oder mehren Punkten schneiden, welche offenbar so beschaffen sein muss, dass ihre Coordinaten $x$ und $y$ dieselben geblieben sind, während sich das $\alpha$ geändert hat; für sie werden also gleichzeitig diese beiden Gleichungen

$$U = 0 \text{ und } \left[\frac{dU}{d\alpha}\right] = 0$$

giltig sein müssen. Eliminirt man aus diesen das $\alpha$ heraus, so erhält man die Relation zwischen $x$ und $y$, welche für alle die Punkte richtig sein muss, in welchen sich zwei auf einander folgende Lagen der Curve schneiden. Diese Relation ist natürlich wieder die Gleichung einer neuen Curve, welche man die einhüllende Curve (*enveloppe*) nennt, während die Curve $U = 0$ die eingehüllte (*enveloppée*) genannt wird. Die einhüllende Curve hat offenbar in jedem ihrer Punkte

eine gemeinschaftliche Tangente mit der gegebenen ihrer Form und Lage nach veränderlichen Curve.

Bedeutet ebenso $U=0$ die Gleichung einer Oberfläche, in der Weise, dass $U$ eine Funktion von $x$, $y$, $z$ und einem constanten Parameter $\alpha$ ist, so wird natürlich für jeden bestimmten Werth von $\alpha$ auch die Oberfläche eine ganz bestimmte sein; gibt man aber dem $\alpha$ nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man offenbar eine Folge von Oberflächen, die alle dieselbe Natur haben und sich nur ihrer Lage und Dimension nach durch den besondern Werth des $\alpha$ von einander unterscheiden. Die ganze Reihe aller dieser Flächen wird durch eine andre Oberfläche begrenzt, von welcher alle jene berührt werden und die analog dem Vorhergehenden die einhüllende Fläche genannt wird. Aendert man in der Gleichung der Fläche $U=f(x, y, z, \alpha)=0$ nur den Parameter $\alpha$, während man die Coordinaten $x$, $y$, $z$ ungeändert lässt, so werden die beiden Gleichungen

$$U=0 \text{ und } \left[\frac{dU}{d\alpha}\right]=0$$

zusammen genommen, für alle jene Punkte gelten, welche den beiden aufeinander folgenden Lagen der Oberfläche gemeinschaftlich sind, d. h. sie werden ihre Durchschnittscurve bilden, in welcher zugleich zwei nächste eingehüllte Oberflächen von der einhüllenden berührt werden. Diese Curve führt den Namen Charakteristik. Eliminirt man aus den beiden genannten Gleichungen die Constante $\alpha$, so erhält man die Relation zwischen $x$, $y$, $z$, welche allen Charakteristiken zukommt, d. h. man erhält die Gleichung der einhüllenden Fläche. Aendert man aber in diesen beiden Gleichungen nur das $\alpha$, während man $x$, $y$, $z$ ungeändert lässt, so gehören die Gleichungen

$$U=0,\ \left[\frac{dU}{d\alpha}\right]=0,\ \left[\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right]=0$$

zu dem oder zu den Punkten, in welchen sich zwei aufeinander folgende Charakteristiken schneiden, die einem speciellen Werth von $\alpha$ zukommen. Eliminirt man aus ihnen das $\alpha$, so erhält man zwei Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, welche für alle Durchschnittspunkte je zweier nächster Charakteristiken giltig sein müssen und welche also

die Gleichung der Curve sein müssen, auf welcher alle diese Durchschnittspunkte liegen. Man nennt diese Curve die **Wendungscurve** (*arête de rebroussement*). Diese Wendungscurve wird offenbar ebenso von allen Charakteristiken berührt, wie die einhüllende Oberfläche von allen eingehüllten.

Eine cylindrische Oberfläche entsteht im Allgemeinen durch die Bewegung einer geraden Linie, die während ihrer Bewegung einer andern unbeweglichen Geraden parallel bleibt und immer durch eine gegebene, die **leitende Curve** geht. Ihre Gleichung in partiellen Differentialquotienten ist:

$$1 = a . \left[\frac{dz}{dx}\right] + b . \left[\frac{dz}{dy}\right]$$

oder in endlicher Gestalt:

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

wo $\varphi$ eine willkührliche Funktion bedeutet, die von der Natur der leitenden Curve abhängt, während $a$ und $b$ die Richtung der unbeweglichen Geraden bedingen, in sofern $x = az$ und $y = bz$ die Gleichungen einer Linie bedeuten, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten parallel mit der gegebenen unbeweglichen gelegt ist.

Eine conische Oberfläche wird durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, welche beständig durch einen gegebenen festen Punkt und durch eine gegebene Curve, die leitende Curve, geht. Ihre in partiellen Differentialquotienten ausgedrückte Gleichung ist:

$$z - c = (x - a) . \left[\frac{dz}{dx}\right] + (y - b) . \left[\frac{dz}{dy}\right]$$

oder in endlicher Gestalt:

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right),$$

wo $\varphi$ eine von der Natur der leitenden Curve abhängige Funktion ist und $a$, $b$, $c$ die Coordinaten des gegebenen festen Punkts sind.

Eine Rotationsoberfläche entsteht durch die Bewegung einer gegebenen Curve um eine gegebene feste Gerade (die Rotations-Axe). Ihre in partiellen Differentialquotienten ausgedrückte Gleichung wird:

$$(b-y+Bz)\cdot\left[\frac{dz}{dx}\right]-(a-x+Az)\cdot\left[\frac{dz}{dy}\right]+A(b-y)-B(a-x)=0$$

oder in endlicher Gestalt:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi\,(Ax+By+z),$$

wo $\varphi$ eine von der Natur der bewegten Curve abhängige Funktion bedeutet und $a$, $b$, $A$, $B$ die Constante in der Gleichung der gegebenen Rotationsaxe sind, nämlich in

$$\xi=A\zeta+a$$
$$\eta=B\zeta+b.$$

Developpable Oberflächen nennt man im Allgemeinen solche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, von der je zwei nächste Lagen sich immer in einer Ebene befinden. Da aber zwei Gerade, die in einerlei Ebene liegen, sich entweder schneiden oder einander parallel sein müssen, so erhält man dadurch entweder die conischen oder die cylindrischen Oberflächen im weitesten Sinn des Worts. Wegen dieser Erzeugung wird man diese Flächen als aus ebenen Elementen bestehend ansehn können, die von unendlich kleiner Breite sind und sich in geraden Linien schneiden. Lässt man das erste Element sich um seine gerade Durchschnittslinie mit dem zweiten Element drehen, bis es in die Ebene des zweiten Elements fällt; lässt man sodann die Vereinigung dieser beiden Elemente sich um die Durchschnittslinie des zweiten Elements mit dem dritten drehen, bis sie in die Ebene des dritten Elements fällt u. s. w. f., so lassen sich alle Elemente, d. h. die ganze Fläche in eine einzige Ebene ausbreiten und dieses ist die wesentliche Eigenschaft der developpabeln Oberflächen.

Wenn man eine Ebene so bewegt, dass sie allmälig alle Punkte einer Curve durchläuft und dabei stets senkrecht auf dieser Curve steht, so werden die auf einander folgenden Durchschnitte je zweier Lagen dieser senkrechten Ebene nothwendig eine developpable Oberfläche bilden. Oder man kann auch eine developpable Oberfläche erhalten, wenn durch die einzelnen Punkte einer gegebenen Curve eine Ebene gelegt wird, die zwei gegebene Oberflächen berührt.

In beiden Fällen ist die developpable Oberfläche eine einhüllende Fläche, während die bewegte Ebene die eingehüllte ist. Die Charakteristik dieser einhüllenden Fläche ist offenbar eine gerade Linie. Daher wird man auch die developpable Oberfläche als durch die Bewegung einer Geraden entstanden ansehn können, die beständig Tangente einer Curve doppelter Krümmung, nämlich der Wendungscurve ist.

Es seien jetzt $x = f(z)$, $y = F(z)$ die Gleichungen einer Curve und

$$z = Mx + Ny + P$$

die Gleichung einer Ebene, die beständig in allen ihren Lagen senkrecht auf der vorigen Curve stehn soll. Wenn man einen gewissen Punkt in der Curve annimmt, etwa $z = \alpha$, $x = f(\alpha)$, $y = F(\alpha)$, so werden die Grössen $M$, $N$, $P$ nothwendig von diesen Coordinaten abhängen, da die Ebene durch diesen Punkt gehn und auch senkrecht auf der Curve stehn soll; sie werden also gewisse Funktionen von $\alpha$ sein müssen. Demnach hat man

$$z = x.\varphi(\alpha) + y.\psi(\alpha) + \alpha.$$

Denkt man sich nun von einem Punkt der Curve zum nächstfolgenden übergegangen, so muss man $\alpha$ ändern, d. h. diese Gleichung in Bezug auf $\alpha$ differentiiren, wodurch man erhält:

$$0 = x.\frac{d.\varphi(\alpha)}{d\alpha} + y.\frac{d.\psi(\alpha)}{d\alpha}$$

$$0 = x.\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2} + y.\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2}$$

Die beiden ersten Gleichungen zusammen genommen bilden die Gleichung der Charakteristik; wenn man aus diesen beiden das $\alpha$ eliminirt, erhält man die Gleichung der developpabeln Oberfläche und wenn man aus allen dreien das $\alpha$ eliminirt, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, welche die Wendungscurve geben.

Durch partielle Differentiation der ersten Gleichung erhält man

$$\left[\frac{dz}{dx}\right] = \varphi(\alpha)$$

$$\left[\frac{dz}{dy}\right] = \psi(\alpha)$$

nd wenn man hieraus $\alpha$ eliminirt:

$$\left[\frac{dz}{dx}\right] = f\left[\frac{dz}{dy}\right]$$

wenn $f$ irgend eine Funktion bedeutet.

Aus der obigen ersten Gleichung, $z = x.\varphi(\alpha) + y.\psi(\alpha) + \alpha$, erhält man jetzt:

$$\alpha = z - x.\left[\frac{dz}{dx}\right] - y.\left[\frac{dz}{dy}\right]$$

$$\text{also auch } \left[\frac{dz}{dx}\right] = \varphi.\left\{z - x.\left[\frac{dz}{dx}\right] - y.\left[\frac{dz}{dy}\right]\right\}$$

$$\text{und } \left[\frac{dz}{dy}\right] = \varphi\left\{z - x\left[\frac{dz}{dx}\right] - y\left[\frac{dz}{dy}\right]\right\}$$

welches alle verschiedene Formen für die Gleichung der developpabeln Oberfläche sind.

Aus der Gleichung $\left[\frac{dz}{dx}\right] = f\left[\frac{dz}{dy}\right]$ ergibt sich endlich noch

$$\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right] = f^1\left[\frac{dz}{dy}\right].\left[\frac{d^2z}{dx.dy}\right]$$

$$\left[\frac{d^2z}{dx.dy}\right] = f^1\left[\frac{dz}{dy}\right].\left[\frac{d^2z}{dy^2}\right]$$

$$\text{und hieraus: } \left[\frac{d^2z}{dx.dy}\right]^2 = \left[\frac{d^2z}{dx^2}\right].\left[\frac{d^2z}{dy^2}\right],$$

welches auch eine Gleichung der developpabeln Oberfläche ist.

Wenn wir endlich noch für irgend eine Curve die besonders merkwürdigen oder ausgezeichneten Punkte (points singuliers) andeuten wollen, so sind zunächst diejenigen Punkte zu nennen, für welche die Ordinate ein Maximum oder Minimum werden. Wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Curve ist, so gibt der Werth von $x$, der aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ erhalten wird, die Abscisse an, zu welcher die grösste oder kleinste Ordinate gehört, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ für denselben Werth von $x$ negativ oder positiv wird.

Wenn der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ gesetzt wird, so

gibt der daraus erhaltene Werth von $x$ diejenige Abscisse an, für welche am Endpunkt der Ordinate ein sogenannter **Inflexions-** oder **Wendepunkt** stattfindet, d. h. ein solcher Punkt, in welchem die Curve die Art ihrer Biegung ändert, sei es, dass sie vor diesem Punkt ihre concave und nachher ihre convexe Seite der $X$Axe zuwendet, oder umgekehrt. Natürlich darf beim Verschwinden des zweiten Differentialquotienten nicht zugleich der Differentialquotient für denselben Werth von $x$ zugleich mit verschwinden, oder wenn dieses dennoch der Fall sein sollte, so muss der erste, für diesen Werth von $x$, nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung sein. — Ebenso muss man $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{0}$ setzen und näher untersuchen, ob bei dem zugehörigen Werth von $x$ ein Wechsel der Concavität und Convexität der Curve stattfindet. — Zur Bequemlichkeit der Rechnung kann es auch mitunter von Vortheil sein, die Concavität und die Convexität in Bezug auf die $Y$Axe in Betracht zu ziehn, so dass man also aus der Gleichung der Curve den zweiten Differentialquotienten von $x$ in Bezug auf $y$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ untersucht.

Ein **isolirter** oder **beigeordneter Punkt** (**Einsiedler**) zeigt sich bei einer Curve, wenn für einen gewissen Werth der Abscisse der zugehörige Werth der Ordinate reell ist, während die Ordinaten, welche zu unmittelbar vorhergehenden oder unmittelbar nachfolgenden Abscissen imaginär werden. Der erste Differentialquotient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ erscheint dann jedesmal in unbestimmter Gestalt $(\frac{0}{0})$, obgleich nicht umgekehrt aus der Unbestimmtheit des ersten Differentialquotienten unmittelbar auf die Existenz eines isolirten Punkts geschlossen werden darf. Denn wenn derselbe in unbestimmter Gestalt erscheint, so ist es auch häufig möglich, dass er keineswegs imaginär, sondern nur mehrdeutig ist. Um die verschiedenen Werthe zu finden, denkt man sich aus der Gleichung der Curve die Wurzelzeichen, welche nothwendig darin vorkommen müssen, wenn überhaupt eine Mehrdeutigkeit möglich sein soll, durch zweckmässige Potenzirung fortgeschafft, dann

wird die Gleichung die Form $f(x,y) = 0$ erhalten. Differentiirt man nun, so wird $\left[\frac{df(x,y)}{dy}\right]\frac{dy}{dx} + \left[\frac{df(x,y)}{dx}\right] = 0$. Verschwinden nun beide partiellen Differentialquotienten von $f(x,y)$ für bestimmte zusammengehörige Werthe von $x$ und $y$, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ und man muss die Differentiation wiederholen, wodurch man erhält

$$\left[\frac{df(x,y)}{dy}\right]\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\frac{d^2f(x,y)}{dx \cdot dy}\right] \cdot \frac{dy}{dx} + \left[\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}\right] = 0$$

Da nun $\left[\frac{df(x,y)}{dy}\right] = 0$ sein soll, so verschwindet das erste Glied, welches $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält und es bleibt eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von $\frac{dy}{dx}$ übrig, woraus sich also zwei Werthe desselben ergeben müssen. Wird aber auch hierbei wieder $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, so wiederholt man die Differentiation, wodurch sich eine cubische Gleichung ergibt u. s. w. f. Auf diese Weise erhält man wahre Werthe von $\frac{dy}{dx}$ für ein und dasselbe zusammengehörige Werthenpaar von $x$ und $y$, was nothwendig anzeigt, dass in diesem Punkt der Curve mehre Tangenten vorhanden sind. Es schneiden sich also in diesem Punkt mehre Aeste der Curve oder es ist ein vielfacher Punkt.

Wenn $y = f(x)$ und auch $\frac{dy}{dx}$ für einen gewissen Werth von $x$ nur einen gewissen Werth erhalten, wenn ferner entweder $f(x+h)$ oder $f(x-h)$ für ein beliebig kleines $h$ imaginär wird, dagegen aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ doppeldeutig ist, so erhält man einen Rückkehrpunkt und zwar der ersten oder der zweiten Art, je nachdem die beiden Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschiedene oder gleiche Zeichen haben.

## §. 12.

### Beispiele.

1. **Aufg.** Es soll die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte untersucht werden.

**Lös.** Wenn man die Gleichung des zweiten Grades in der Gestalt

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) x^2 - 2E\left(1 + \frac{1}{m}\right) x = 0$$

annimmt, so bedeutet sie eine Parabel, eine Hyperbel, eine Ellipse oder einen Kreis, je nachdem $\frac{1}{m} = 1$ oder $> 1$ oder $< 1$ oder $= 0$ ist.

Es wird $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{E\left(1+\frac{1}{m}\right) - \left(1-\frac{1}{m}\right) x}{\sqrt{2E\left(1+\frac{1}{m}\right)x - \left(1-\frac{1}{m}\right)x^2}}$, mithin

$$y - x \cdot \frac{dy}{dx} = \pm \frac{E\left(1+\frac{1}{m}\right) x}{\sqrt{2E\left(1+\frac{1}{m}\right)x - \left(1-\frac{1}{m}\right)x^2}}$$

$$x - y \cdot \frac{dx}{dy} = - \frac{E\left(1+\frac{1}{m}\right) x}{E\left(1+\frac{1}{m}\right) - \left(1-\frac{1}{m}\right) x}$$

woraus sich ergibt, dass nur unter der Bedingung $\frac{1}{m} > 1$ die Curve eine Asymptote haben kann, also nur die Hyperbel.

$$\textit{Subtang.} = \frac{2E\left(1+\frac{1}{m}\right)x - \left(1-\frac{1}{m}\right)x^2}{E\left(1+\frac{1}{m}\right) - \left(1-\frac{1}{m}\right) x}$$

$$\textit{Subnorm.} = E\left(1+\frac{1}{m}\right) - \left(1-\frac{1}{m}\right) x$$

Die *Subtang.* wird $= 2x$, wenn $\frac{1}{m} = 1$, d. h. bei der Parabel.

Die *Tang.* und *Norm.* ergibt sich leicht, wenn auch im Allgemeinen in unbequemer Gestalt. Einfacher und verständlicher werden alle diese Ausdrücke, wenn man die Gleichungen der drei Curven von einander sondert. Diese werden bekanntlich, wenn man bei der Parabel den Scheitel-, bei der Ellipse und Hyperbel den Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt, die Hauptaxen zu Abscissenaxen und darauf senkrecht die Ordinaten:

Gleichung der Parabel: $y^2 = 2px$

- - Ellipse: $y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$

- - Hyperbel: $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$.

Hier bedeutet $2p$ den Parameter der Parabel, $a$ die halbe Hauptaxe, $e$ das Verhältniss der Excentricität zur Hauptaxe.

Hiernach erhält man

1) Für die Parabel:

Gleichung der Tangente: $\eta - y = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}} \cdot (\xi - x)$

- - Normale: $\eta - y = \mp\sqrt{\frac{2x}{p}} \cdot (\xi - x)$

Länge der Tangente $= \sqrt{2px + 4x^2}$

- - Subtangente $= 2x$

- - Normale $= \sqrt{2px + p^2}$

- des Krümmungshalbmessers $= \frac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$

Die Coordinaten d. Krümmungsmittelpunkts $\begin{cases} \beta = \sqrt{2px} + \frac{(p+2x)\sqrt{2x}}{\sqrt{p}} \\ \alpha = -(p+x) \end{cases}$

Gleichung der Evolute: $\beta^2 + 2\alpha^2\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) = 0$, nur für negative Werthe von $\alpha$ möglich.

2) Für die Ellipse:

Gleichung der Tangente: $\eta - y = \mp \frac{x\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} (\xi - x)$

- - Normale: $\eta - y = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x\sqrt{1-e^2}} (\xi - x)$

Länge der Tangente $= \frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a^2 - e^2x^2}$

- - Subtangente $= \frac{a^2 - x^2}{x}$

- - Normale $= \sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2 - e^2x^2}$

- - Subnormale $= (1-e^2)\,x$

- des Krümmungshalbmessers $= \frac{(a^2 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{1-e^2}}$

Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts $\begin{cases} \beta = -\frac{e^2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{1-e^2}} \\ \alpha = \frac{e^2x^3}{a^2} \end{cases}$

Gleichung der Evolute: $\alpha^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-e^2}\,.\,\beta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}e^{\frac{4}{3}}$

3) Für die Hyperbel:

Gleichung der Tangente: $\eta - y = \pm\frac{x\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.\,(\xi - x)$

- - Normale: $\eta - y = \mp\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x\sqrt{e^2-1}}\,.\,(\xi - x)$

Länge der Tangente $= \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^2}$

- - Subtangente $= \frac{x^2 - a^2}{x}$

- - Normale $= \sqrt{e^2-1}\sqrt{e^2x^2 - a^2}$

- - Subnormale $= (e^2 - 1)\,x$

- des Krümmungshalbmessers $= \frac{(e^2x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{e^2-1}}$

Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts $\begin{cases} \beta = -\frac{e^2(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{e^2-1}} \\ a = \frac{e^2x^3}{a^2} \end{cases}$

Gleichung der Evolute: $\alpha^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{e^2-1}\,.\,\beta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\,.\,e^{\frac{4}{3}}$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Asymptote mit der X Axe bildet, ist $= \sqrt{e^2 - 1}$.

2. Aufg. Es sollen die hingehörigen Stücke bei der unter dem Namen der Cissoide des Diocles bekannten Curve bestimmt werden.

Lös. Wenn man einen festen Kreis mit dem Radius $r$ hat, den Endpunkt eines seiner Durchmesser zum Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten nimmt, diesen Durchmesser selbst zur $X$ Axe und die darauf Senkrechten zu Ordinaten, so bildet sich die Curve nach folgendem Gesetz: Wenn man in dem zweiten Endpunkt des genannten Durchmessers eine Tangente an den gegebenen Kreis zieht, die natürlich parallel mit der Ordinatenaxe geht; wenn man alsdann von dem angenommenen Anfangspunkt der Coordinaten eine Secante bis zum Durchschnitt mit der soeben erwähnten Tangente führt; sodann die Länge der Sehne, welche von der Secante durch den Kreis abgeschnitten wird, auf ihr wiederum, vom Durchschnittspunkt mit der Tangente gerechnet, rückwärts abschneidet, so ist dieser Abschneidepunkt ein Punkt der Cissoide.

Die Gleichung der Cissoide wird: $y = \pm \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2r - x}}$

„ „ ihrer Tangente: $\eta - y = \frac{(3r - x)\sqrt{x}}{(2r - x)^{3/2}} \cdot (\xi - x)$

„ „ „ Normale: $\eta - y = -\frac{(2r - x)^{3/2}}{(3r - x)\sqrt{x}} \cdot (\xi - x)$

die Länge der Tangente wird $= \frac{rx \cdot \sqrt{8r - 3x}}{(3r - x)\sqrt{2r - x}}$

„ „ „ Subtangente $= \frac{x(2r - x)}{3r - x}$

„ „ „ Normale $= \frac{rx\sqrt{x}\sqrt{8r - 3x}}{(2r - x)^2}$

„ „ „ Subnormale $= \frac{x^2(3r - x)}{(2r - x)^2}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{r\sqrt{x}(8r - 3x)^{3/2}}{3(2r - x)^2}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts: $\begin{cases} \beta = \dfrac{8r\sqrt{x}}{3\sqrt{2r-x}} \\ \alpha = -\dfrac{rx\,(12r-5x)}{3\,(2r-x)^2} \end{cases}$

Die Gleichung der Evolute wird: $27\beta^4 + 1152\,r^2\beta^2 + 4096\,r^3\alpha = 0$

Bei $x = 0$ ist ein Rückkehrpunkt der ersten Art; die zu $x = 2r$ gehörige unendliche Ordinate ist Asymptote der Curve. Da $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \pm\dfrac{3r^2}{\sqrt{x\,(2r-x)^5}}$ immer ein gleiches Zeichen mit der Ordinate $y$ hat, so kehrt die Curve stets ihre convexe Seite der $X$Axe zu.

3. Aufg. Es soll die gewöhnliche Cyloide untersucht werden.

Lös. Wenn ein Kreis mit dem Radius $r$ auf einer geraden Linie rollt, so beschreibt ein in der Peripherie desselben angenommener Punkt die gewöhnliche Cycloide. Beim Anfange des Rollens möge der angenommene Punkt auf der Linie liegen und dieses sei der Anfangspunkt der Coordinaten, die gegebene Linie die $X$Axe und darauf senkrecht die $Y$Axe, so ist die Gleichung der Cycloide:

$$y = r\,.\,arc.\left(sin\;vers = \frac{x}{r}\right) + \sqrt{2rx - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{x\sqrt{2r-x}}$$

Die Gleichung ihrer Tangente wird: $\eta - y = \sqrt{\dfrac{2r-x}{x}}\,.\,(\xi - x)$

" " " " " $\eta - y = -\sqrt{\dfrac{x}{2r-x}}\,(\xi - x)$

Die Länge der Tangente wird $= \sqrt{2r} + \dfrac{r\sqrt{r}}{\sqrt{2r-x}}\,.\,arc\left(sin\,vers = \dfrac{x}{r}\right)$

" " " Subtangente " $= x + \dfrac{r\sqrt{x}}{\sqrt{2r-x}}\,.\,arc\left(sin\,vers = \dfrac{x}{r}\right)$

" " " Normale " $= \sqrt{2r\,(2r-x)} + \dfrac{r\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}.arc\left(sin\,vers = \dfrac{x}{r}\right)$

Die Länge der Subnormale wird $= 2r - x + \frac{r\sqrt{2r-x}}{\sqrt{x}} . arc\left(sin\,vers = \frac{x}{r}\right)$

" " des Krümmungshalbmessers $= -2x\sqrt{2rx(2r-x)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta = -\sqrt{2rx-x^2} + r.arc\left(sin\,vers = \frac{x}{r}\right) \\ \alpha = 4r - x \end{cases}$$

Die Gleichung der Evolute wird:

$$\beta = r.arc\left(sin\,vers = \frac{4r-\alpha}{r}\right) - \sqrt{2r(4r-\alpha)-(4r-\alpha)^2},$$

welches die Gleichung einer der ersten vollkommen congruenten Cycloide ist.

4. Aufg. Es soll die Lemniscate untersucht werden.

Lös. Die Lemniscate ist eine Curve vom vierten Grad, deren Gestalt die einer Acht ist, nämlich ∞. Nimmt man den beiden Theilen gemeinschaftlichen Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten, die durch diesen Punkt gehende horizontale Gerade zur XAxe und darauf senkrecht die YAxe, so wird, wenn noch $a$ die Hälfte der gezogenen horizontalen bedeutet, die Gleichung der Lemniscate:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

oder wenn man Polarcoordinaten wählt, was hier sehr zweckmässig ist:

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x.(a^2-2x^2-2y^2)}{y.(a^2+2x^2+2y^2)} = \frac{\cos\varphi.(1-2\cos 2\varphi)}{\sin\varphi.(1+2\cos 2\varphi)};\quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

Die Gleichung der Tangente wird $\eta - y = \frac{x.(a^2-2x^2-2y^2)}{y.(a^2+2x^2+2y^2)}.(\xi - x)$

- - - Normale - $\eta - y = \frac{y(a^2+2x^2+2y^2)}{x(2x^2+2y^2-a^2)}.(\xi - x)$

Die Länge der Tangente wird $= \frac{a^2y.\sqrt{x^2+y^2}}{x(a^2-2x^2-2y^2)} = \frac{a.\sin\varphi.\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos\varphi.(1-2\cos 2\varphi)}$

Die L. d. Subtang. wird $= \frac{y^2(a^2+2x^2+2y^2)}{x(a^2-2x^2-2y^2)} = \frac{a.\sin\varphi^2.(1+2\cos 2\varphi)\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos\varphi.(1-2\cos 2\varphi)}$

- Länge der Normale wird $= \frac{a^2\sqrt{x^2+y^2}}{a^2+2x^2+2y^2} = \frac{a.\sqrt{\cos 2\varphi}}{1+2\cos 2\varphi}$

- L. d. Subnorm. wird $= \frac{x(a^2-2x^2-2y^2)}{a^2+2x^2+2y^2} = \frac{a.\cos\varphi.(1-2\cos 2\varphi).\sqrt{\cos 2\varphi}}{1+2\cos 2\varphi}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta = -\frac{y(a^2-x^2-y^2)}{3(x^2+y^2)} = -\frac{2a.\sin\varphi^3}{3\sqrt{\cos 2\varphi}} \\ \alpha = \frac{x(a^2+x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)} = \frac{2a.\cos\varphi^3}{3\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{cases}$$

Die Gleichung der Evolute wird: $3(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}}} = 2a.$

Wenn man wegen der Aufsuchung ausgezeichneter Punkte den ersten Differentialquotienten unbestimmt annimmt, d. h. also

$$x.(a^2-2x^2-2y^2)=0$$
$$y.(a^2+2x^2+2y^2)=0$$

setzt, so erhält man als zusammengehörige Werthe von $x$ und $y$, die zugleich der Gleichung der Curve genügen, nur $x=0$ und $y=0$; um nun den wahren Werth von $\frac{dy}{dx}$ für diese besondern Werthe der Variabeln zu erhalten, differentiirt man die Differentialgleichung

$$y.(a^2+2x^2+2y^2).\frac{dy}{dx} = x.(a^2-2x^2-2y^2)$$

nochmals und erhält dann, bei Berücksichtigung der genannten Bedingungsgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1$$

d. h. die Curve hat im Anfangspunkt der Coordinaten zwei Tangenten, also einen doppelten Punkt, die respectiven Winkel, welche die beiden Tangenten mit der XAxe bilden, sind $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$. Es stehn daher die beiden sich hier schneidenden Aeste der Curve auf einander senkrecht.

5. **Aufg.** Untersuchung der Conchoide des Nicomedes.

Lös. Denkt man sich eine gerade Linie und zwar, um die Begriffe zu fixiren, in horizontaler Lage, unterhalb derselben in der senkrechten Entfernung $b$ einen Punkt, den man den Pol der Conchoide nennt, zieht man alsdann von diesem Pol aus gerade Linien durch die feste Gerade und schneidet auf ihnen oberhalb und unterhalb des Durchschnittspunkts eine constante Grösse $a$ ab, so erhält man dadurch zwei Punkte, welche respective zur obern und untern Conchoide gehören. Nimmt man nun die gegebene feste Gerade zur $X$Axe, die von dem Pol auf diese gefällte Senkrechte zur $Y$Axe an und zwar so, dass zur obern Conchoide die positiven Werthe der $y$ gehören, zur untern dagegen die negativen, so wird die Gleichung der Conchoide:

$$y^4 + 2b\,y^3 + (b^2 - a^2 + x^2)\,y^2 - 2a^2\,by - a^2\,b^2 = 0$$

oder $x = \left(\frac{b}{y} + 1\right)\sqrt{a^2 - y^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3 + a^2b};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2\,y^3\left\{y^3 + 3b\,y^2 - 2a^2b\right\}}{(y^3 + a^2b)^3}$$

Die Gleichung der Tangente ist: $\eta - y = -\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3 + a^2b}.(\xi - x)$

" " " Normale " $\eta - y = \frac{y^3 + a^2b}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}.(\xi - x)$

Die Länge der Tangente wird $= \frac{a\sqrt{y^4 + 2b\,y^3 + a^2\,b^2}}{y\sqrt{a^2-y^2}}$

" " " Subtangente " $= \frac{y^3 + a^2\,b}{y\sqrt{a^2-y^2}}$

" " " Normale " $= \frac{ay\sqrt{y^4 + 2b\,y^3 + a^2\,b^2}}{y^3 + a^2\,b}$

" " " Subnormale " $= \frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3 + a^2\,b}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= -\frac{a(y^4 + 2b\,y^3 + a^2\,b^2)^{3/2}}{y^3(y^3 + 3\,b\,y^2 - 2a^2\,b)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind:

$$\left\{\begin{aligned}\beta &= \frac{b\,(y^6 - 3a^2y^4 - 3a^2by^3 - a^4b^2)}{y^3\,(y^3 + 3by^2 - 2a^2b)}\\ \alpha &= -\,\frac{b\,(2y+3b)\,(a^2-y^2)^{3/2}}{y\,(y^3+3by^2-2a^2b)}\end{aligned}\right.$$

Für $x = \infty$ wird nothwendig $y = 0$ und unter dieser Voraussetzung werden

$$y - x\,.\,\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(2a^2b + a^2y - by^2)}{y^3 + a^2b} = 0$$

$$x - y\,.\,\frac{dx}{dy} = \frac{2a^2b + a^2y - by^2)}{y\sqrt{a^2-y^2}} = \infty$$

d. h. es giebt eine Asymptote, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, die trigonometrische Tangente ihres Winkels mit der $X$Axe ist

$$= \frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y^3 + a^2b} \text{ oder für } y = 0, \text{ selbst } = 0$$

es wird also die ursprünglich angenommene feste Gerade, die zugleich zur $X$Axe diente, die Asymptote der Curve.

Der zweite Differentialquotient $= 0$ gesetzt, giebt:

$$y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0.$$

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung geben die Ordinaten der Wendungspunkte, welche aber wegen ihrer Realität näher zu untersuchen sind, wobei sich aber eine Verschiedenheit herausstellt, je nachdem $b$ grösser als $a$, oder $b$ kleiner als $a$ ist. In letzterm Fall ($b < a$), hat die Curve eine sogenannte Schlinge oder Schleife.

Anm. Wenn man auf der ursprünglich als fest angenommenen Geraden eine Ellipse so fortschiebt, dass ihre grosse Axe stets in dieser Linie liegt und von dem angenommenen Pol der Conchoide gerade Linien durch den Mittelpunkt der Ellipse zieht, so werden die beiden Durchschnittspunkte in der Peripherie der Ellipse Punkte einer Curve, die man elliptische Conchoide nennt. Ebenso erhält man auch eine parabolische und eine hyperbolische Conchoide. Wo vorhin die vom Pol ausgehende gerade Linie durch den Mittelpunkt der

Ellipse gezogen wurde, wird sie bei den beiden letztern durch einen beliebig angenommenen Punkt der bezüglichen Axe zu ziehn sein.

6. Aufg. Es soll die logarithmische oder logistische Linie untersucht werden.

Lös. In dieser Curve schreiten die Ordinaten in geometrischer Progression fort, während die Abscissen in arithmetischer Reihe wachsend angenommen werden. Ihre Gleichung wird: $y = m . log x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{m}{x^2}$$

Die Gleichung der Tangente wird: $\eta - y = \frac{m}{x}(\xi - x)$

oder $\eta = m\left(\frac{\xi}{x} - 1 + log x\right)$

„ „ „ Normale wird: $\eta - y = -\frac{x}{m}(\xi - x)$

oder $\eta = -\frac{x}{m}\xi + \frac{x^2}{m} + m \log x$

Die Länge der Tangente wird $= log x . \sqrt{m^2 + x^2}$

„ „ „ Subtangente wird $= x . log x$

„ „ „ Normale „ $= \frac{m}{x}\sqrt{m^2 + x^2}$

„ „ „ Subnormale „ $= \frac{m^2}{x} log x$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{(m^2 + x^2)^{3/2}}{mx}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = m . log x - \frac{m^2 + x^2}{m} \\ \alpha = x + \frac{m^2 + x^2}{x} \end{cases}$$

7. Aufg. Es soll die Quadratrix des Dinostratus untersucht werden.

Lös. Wenn man eine gerade Linie um einen festen Endpunkt bewegt denkt, so dass ein Kreisbogen und zwar zunächst ein Quadrant entsteht, so möge die erste Lage des bewegten Radius eine ver-

ticale gewesen sein und die Ordinaten oder $Y$Axe vorstellen, seine letzte Lage, die horizontale, die Abscissen- oder $X$Axe. Denkt man sich nun auf dem bewegten Radius in einer seiner Lagen einen Punkt so bestimmt, dass der bis dahin beschriebene Bogen sich zum ganzen Viertelkreis wie $r-y$ zu $r$ verhält, so gehört dieser Punkt der Quadratrix an. Nimmt man nun noch an, dass der Winkel, den der bewegte Radius noch zu beschreiben hat, bis er in die horizontale Lage kommt, sich zu zwei Rechten verhält so wie $\varphi : \pi$, so hat man als Gleichung der Quadratrix

$$y = \frac{2\varphi}{\pi}.r;\ y = x.tang\,\varphi;\ x = \frac{2\varphi}{\pi.tang\,\varphi}.r$$

Um den Durchschnittspunkt der Curve mit der letzten Lage des bewegten Radius, d. h. mit der Abscissenaxe zu erhalten, muss man $\varphi = 0$ setzen, es wird aber dann $x = \frac{0}{0}$, oder wenn man nach der gewöhnlichen Methode den wahren Werth bestimmt $= \frac{2r}{\pi}$.

Bequemer werden die nöthigen Ausdrücke, wenn man neben $\varphi$ noch den radius vector $u$ statt der rechtwinkligen Coordinaten in die Rechnung einführt; es wird dann $y = u\,sin\,\varphi$, $x = u\,cos\,\varphi$, also die Gleichung der Curve:

$$u = \frac{2r}{\pi}.\frac{\varphi}{sin\,\varphi}$$

mithin

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{2r}{\pi}.\frac{sin\,\varphi - \varphi.cos\,\varphi}{sin\,\varphi^2};\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{2r}{\pi}.\frac{\varphi.(1+cos\,\varphi^2) - 2\,sin\,\varphi.cos\,\varphi}{sin\,\varphi^3}$$

Die Länge der Tangente wird

$$= \frac{2r\varphi}{\pi.sin\,\varphi^2}.\sqrt{sin\,\varphi^2 - 2\varphi.sin\,\varphi.cos\,\varphi + \varphi^2}$$

Die Länge der Subtangente wird $= \frac{2r\varphi}{\pi.sin\,\varphi^2}.(sin\,\varphi.cos\,\varphi - \varphi)$

\- \- \- Normale \- $= \frac{2r\varphi.\sqrt{sin\varphi^2 - 2\varphi.sin\varphi.cos\varphi + \varphi^2}}{\pi.(sin\,\varphi.cos\,\varphi - \varphi)}$

\- \- \- Subnormale \- $= \frac{2r\varphi}{\pi}.\frac{sin\,\varphi^2}{sin\,\varphi.cos\,\varphi - \varphi}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{r}{\pi} \frac{\{\sin\varphi^2 - 2\varphi.\sin\varphi.\cos\varphi + \varphi^2\}^{3/2}}{\sin\varphi^3(\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi)}$

Die rechtwinkligen Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\beta = \frac{r}{\pi} \frac{\{\sin\varphi^3.\cos\varphi + \varphi.\sin\varphi^2.(1-4\cos\varphi^2, + \varphi^2.\sin\varphi.\cos\varphi.(1+2\cos\varphi^2) - \varphi^3\}}{\sin\varphi^3.(\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi)}$$

$$\alpha = -\frac{r}{\pi} \frac{\{\sin\varphi^2 - 4\varphi.\sin\varphi.\cos\varphi + \varphi^2.(1+2\cos\varphi^2)\}}{\sin\varphi.(\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi)}$$

Um zu untersuchen, ob die Curve Asymptoten hat, muss man in den Ausdruck der Polarsubtangente $u^2.\frac{d\varphi}{du}$, den radius vector $u$ unendlich setzen oder denjenigen Werth der amplitudo $\varphi$, welcher aus der Gleichung der Curve dem unendlichen $u$ entspricht, und dann zusehn, ob die Polarsubtangente einen endlichen Werth erhält. Setzt man aber in $u = \frac{2r}{\pi}.\frac{\varphi}{\sin\varphi}$ den radius vector $u = \frac{1}{0}$, so wird $\varphi = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots.$, mithin $u^2.\frac{d\varphi}{du} = \frac{2r}{\pi}.\frac{\varphi^2}{\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi} = 2r, -4r, +6r, -8r, \ldots.$ Die Curve hat also unendlich viele Asymptoten.

Anm. Ganz ähnlich gibt die Quadratrix von Tschirnhausen als Gleichung

$$y = \frac{2\varphi}{\pi}.r \text{ und } x = r.\cos\varphi$$

$$\text{oder } x = r\cos\frac{\pi y}{2r}.$$

8. Aufg. Es soll die archimedische Spirale untersucht werden.

Lös. Wenn eine Linie $r$ um einen festen Endpunkt gleichmässig bewegt wird, so dass ein Kreis entsteht, und wenn man zugleich auf diesem Radius einen Punkt vom Mittelpunkt aus sich gleichmässig nach der Peripherie hin bewegen lässt, so dass seine jedesmalige Entfernung vom Mittelpunkt ($u$) sich zum Radius ($r$) ebenso verhält, wie der von Anfang der Bewegung an beschriebene Winkel ($\varphi$) zu vier

Rechten, so beschreibt dieser Punkt die archimedische Spirale. Ihre Gleichung ist offenbar

$$u = \frac{r\varphi}{2\pi}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten, da $y = u \sin\varphi$, $x = u \cos\varphi$ ist:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{2\pi} \cdot arc \left( tg = \frac{y}{x} \right)$$

wobei dann wesentlich darauf zu achten ist, dass die rechte Seite der Gleichung unendlich vieldeutig ist, da zu derselben Tangente $\frac{y}{x}$ unendlich viele Bögen gehören. Es wird dann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi \cdot \frac{du}{d\varphi} + u\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot \frac{du}{d\varphi} - u\sin\varphi}$$

Die Längen der rechtwinkligen Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale, aber durch Polar-Coordinaten ausgedrückt, werden dann

die Länge der Subtangente wird $= \frac{u \cdot \sin\varphi \cdot \{\cos\varphi - \varphi \cdot \sin\varphi\}}{\sin\varphi + \varphi \cdot \cos\varphi}$

\- - - Tangente - $= \frac{u \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{1 + \varphi^2}}{\sin\varphi + \varphi \cdot \cos\varphi}$

\- - - Subnormale - $= \frac{u \cdot \sin\varphi \cdot \{\sin\varphi + \varphi \cdot \cos\varphi\}}{\cos\varphi - \varphi \cdot \sin\varphi}$

\- - - Normale - $= \frac{u \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{1 + \varphi^2}}{\cos\varphi - \varphi \cdot \sin\varphi}$

\- - des Krümmungshalbmessers wird $= \frac{u(1 + \varphi^2)^{3/2}}{\varphi(\varphi^2 + 2)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind:

$$\begin{cases} \beta = u \cdot \frac{\{\varphi \cdot \sin\varphi + (1 + \varphi^2) \cdot \cos\varphi\}}{\varphi(\varphi^2 + 2)} \\ \alpha = u \cdot \frac{\{\varphi \cdot \cos\varphi - (1 + \varphi^2) \cdot \sin\varphi\}}{\varphi(\varphi^2 + 2)} \end{cases}$$

Die Polarsubtangente, d. h. die Länge desjenigen Perpendikels, welches im Pol der Spirale auf dem radius vector eines Punkts errichtet wird, bis zum Durchschnitt mit der Tangente dieses Punkts, wird $= u^2 . \frac{d\varphi}{du} = \frac{2\pi u^2}{r}$ und die Polarsubnormale $= \frac{du}{d\varphi} = \frac{r}{2\pi}$.

9. Aufg. Untersuchung der hyperbolischen oder umgekehrten archimedischen Spirale.

Lös. Wenn die nach entsprechenden Punkten der Spirale und des Kreises gezogenen Radien sich umgekehrt wie die zugehörigen Bögen verhalten, so wird die hierzu gehörige Gleichung:

$$u . \varphi = 2 r \pi$$

Die Länge der Subtangente wird $= \frac{u \sin\varphi . \{\cos\varphi + \varphi . \sin\varphi\}}{\sin\varphi - \varphi . \cos\varphi}$

- - - Tangente - $= \frac{u \sin\varphi . \sqrt{1+\varphi^2}}{\sin\varphi - \varphi . \cos\varphi}$

- - - Subnormale - $= \frac{u \sin\varphi . \{\sin\varphi - \varphi . \cos\varphi\}}{\cos\varphi + \varphi . \sin\varphi}$

- - - Normale - $= \frac{u \sin\varphi \sqrt{1+\varphi^2}}{\cos\varphi + \varphi . \sin\varphi}$

- - des Krümmungshalbmessers wird $= \frac{u(1+\varphi^2)^{3/2}}{\varphi^3}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta = - u \frac{\{\varphi . \sin\varphi + (1+\varphi^2) . \cos\varphi\}}{\varphi^3} \\ \alpha = - u \frac{\{\varphi . \cos\varphi - (1+\varphi^2) . \sin\varphi\}}{\varphi^3} \end{cases}$$

Die Länge der Polarsubtangente wird $= \frac{u^2 . d\varphi}{du} = - 2 r \pi$

- - - Polarsubnormale - $= \frac{du}{d\varphi} = - \frac{2 r \pi}{\varphi^2}$

Damit die Curve eine Asymptote habe, muss die Subtangente $\frac{u^2 . d\varphi}{du}$ für ein unendlich gross werdendes $u$ einen endlichen Werth

haben; sie wird aber $= -2r\pi$, und da zugleich für ein unendlich grosses $a$ aus der Gleichung der Curve sich $\varphi = 0$ ergibt, so folgt, dass die hyperbolische oder reciproke Spirale eine Asymptote hat, die mit der X Axe oder mit der Linie, von welcher ab die Winkel $\varphi$ gezählt werden, parallel geht und zwar in der Entfernung $2r\pi$.

10. Aufg. Es soll die parabolische Spirale untersucht werden.

Lös. Wenn man, ebenso wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben, zwei zusammengehörige radii vectores der Curve und des Kreises nimmt und sich diese jetzt so zu einander verhalten sollen, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Bögen, wenn also $u : r = \sqrt{\varphi} : \sqrt{2\pi}$ sein soll, so wird die Gleichung der parabolischen Spirale $u^2 = \frac{r^2 . \varphi}{2\pi}$. Es kommt dieses auf dasselbe hinaus, wenn auch in etwas verschiedener Gestalt, als wenn man die Kreisperipherie als Abscissen-Axe annimmt, und darauf senkrechte Ordinaten, die natürlich nach dem Mittelpunkt gerichtet sind, aufsetzt, die nach demselben Gesetz gebildet sind, wie bei der gewöhnlichen Parabel: — daher der Name. —

Die Gleichung der Curve ist also

$$u^2 = \frac{r^2 . \varphi}{2\pi}, \text{ mithin } \frac{du}{d\varphi} = \frac{r}{2\sqrt{2\pi} . \sqrt{\varphi}}, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{r}{4\sqrt{2\pi} . \varphi^{3/2}}$$

Die Länge der Tangente wird $= \frac{u \sin\varphi . \sqrt{1 + 4\varphi^2}}{\sin\varphi + 2\varphi . \cos\varphi}$

- - - Subtangente wird $= \frac{u \sin\varphi . \{\cos\varphi - 2\varphi . \sin\varphi\}}{\sin\varphi + 2\varphi . \cos\varphi}$

- - - Normale - $= \frac{u \sin\varphi . \sqrt{1 + 4\varphi^2}}{\cos\varphi - 2\varphi . \sin\varphi}$

- - - Subnormale - $= \frac{u \sin\varphi . \{\sin\varphi + 2\varphi . \cos\varphi\}}{\cos\varphi - 2\varphi . \sin\varphi}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{u(1 + 4\varphi^2)^{3/2}}{2\varphi . (3 + 4\varphi^2)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\beta = \frac{u.\{4\varphi.\sin\varphi + (1+4\varphi^2).\cos\varphi\}}{2\varphi.(3+4\varphi^2)}$$

$$\alpha = \frac{u.\{4\varphi.\cos\varphi - (1+4\varphi^2).\sin\varphi\}}{2\varphi.(3+4\varphi^2)}$$

Die Länge der Polarsubtangente wird $= \frac{2r\varphi\sqrt{\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$

- - - Polarsubnormale - $= \frac{r}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{\varphi}}$

11. **Auf.** Untersuchung der Spiralen im Allgemeinen.

**Lös.** Die in den drei letzten Aufgaben genannten Spiralen sind in der allgemeinsten Gattung derartiger Curven begriffen, welche zu ihrer Gleichung $u = a.\varphi^n$ haben. Für diese ist

die Länge der Tangente $= \frac{u.\sin\varphi.\sqrt{n^2+\varphi^2}}{n.\sin\varphi + \varphi.\cos\varphi}$

- - - Subtangente $= \frac{u.\sin\varphi.\{n.\cos\varphi - \varphi.\sin\varphi\}}{n.\sin\varphi + \varphi.\cos\varphi}$

- - - Normale $= \frac{u.\sin\varphi\sqrt{n^2+\varphi^2}}{n.\cos\varphi - \varphi.\sin\varphi}$

- - - Subnormale $= \frac{u.\sin\varphi.\{n.\sin\varphi + \varphi.\cos\varphi\}}{n.\cos\varphi - \varphi.\sin\varphi}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{u.(n^2+\varphi^2)^{3/2}}{\varphi.(\varphi^2+n^2+n)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta = \frac{n.u.\{\varphi.\sin\varphi + (n^2+\varphi^2).\cos\varphi\}}{\varphi.(\varphi^2+n^2+n)} \\ \alpha = \frac{n.u.\{\varphi.\cos\varphi - (n^2+\varphi^2).\sin\varphi\}}{\varphi.(\varphi^2+n^2+n)} \end{cases}$$

Die Polarsubtangente wird $= u^2.\frac{d\varphi}{du} = \frac{a}{n}\varphi^{n-1}$

- Polartangente - $= u.\sqrt{1+u^2.\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2} = \frac{a}{n}.\varphi^n.\sqrt{n^2+\varphi^2}$

Die Polarsubnormale - $= \frac{du}{d\varphi} = n.a.\varphi^{n-1}$

- Polarnormale - $= \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} = a.\varphi^{n-1}.\ \sqrt{n^2+\varphi^2}$

12. Aufg. Untersuchung der logarithmischen Spirale.

Lös. Diese Spirale ist nicht unter den bisher behandelten mitbegriffen, sondern unterscheidet sich von diesen wesentlich dadurch, dass während in den frühern die amplitudo $\varphi$ zu einer Potenz mit constanten Exponenten erhoben wurde, bei ihr gerade diese amplitudo als Exponent einer constanten Potenzbasis erscheint.

Um eine Vorstellung von dieser Curve zu erhalten, kann man sagen: ihre radii vectores wachsen in geometrischer Proportion, während die Winkel oder die Amplituden arithmetisch fortschreiten. Ihre Gleichung hat die Form $u = a^{\varphi}$.

Hieraus ergibt sich: $\frac{du}{d\varphi} = \log a . a^{\varphi}$; $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = (\log a)^2 . a^{\varphi}$,

oder $\frac{du}{d\varphi} = k . a^{\varphi} = k u$; $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = k^2 . a^{\varphi} = k^2 u$.

wenn man durch $k$ den natürlichen Logarithmus von $a$ bezeichnet.

Die Länge der Subtangente wird $= u . \sin\varphi . \frac{k . \cos\varphi - \sin\varphi}{k . \sin\varphi + \cos\varphi}$

- - - Tangente -

$$= \frac{u . \sqrt{1 - \cos\varphi^2 + \cos\varphi^4 + 2k . \sin\varphi . \cos\varphi^3 + k^2 . (1 - \cos\varphi^4)}}{k . \sin\varphi + \cos\varphi}$$

Die Länge der Subnormale wird $= u . \sin\varphi . \frac{k . \sin\varphi + \cos\varphi}{k . \cos\varphi - \sin\varphi}$

- - - Normale -

$$= \frac{u . \sqrt{1 - \cos\varphi^4 - 2k . \sin\varphi . \cos\varphi^3 + k^2 . (1 - \cos\varphi^2 + \cos\varphi^4)}}{k . \cos\varphi - \sin\varphi}$$

Die Länge der Polarsubtangente wird $= \frac{1}{k} . u$

- - - Polartangente - $= \frac{u}{k} \sqrt{1 + k^2}$

- - - Polarsubnormale - $= k . u$

Die Länge der Polarnormale wird $= u . \sqrt{1+k^2}$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente im Berührungspunkt mit dem radius vector macht, ist $= \frac{1}{k}$, also constant.

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird $= u \sqrt{1+k^2}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts: $\begin{cases} \beta = k . a^{\varphi} . \cos \varphi \\ \alpha = -k\, a^{\varphi} . \sin \varphi \end{cases}$

Die Gleichung der Evolute wird: $\log\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{k}\right) = arc \left(tang = -\frac{\alpha}{\beta}\right)$

oder wenn man $\beta = u^1 . \cos \varphi^1$ und $\alpha = u^1 . \sin \varphi^1$ setzt, diese: $u^1 = k . a^{2\pi - \varphi^1}$, oder, um es noch einfacher zu haben, wenn man $\beta = k v^1 . \cos \psi^1$ und $\alpha = k v^1 . \sin \psi^1$ setzt: $v^1 = a^{\psi^1}$, d. h. also, die Evolute der logarithmischen Spirale, ist wieder eine und zwar der ersten ähnliche Spirale.

13. Aufg. Untersuchung der Kettenlinie.

Lös. Denkt man sich einen vollkommen biegsamen, aber schweren Faden in seinen beiden Endpunkten an zwei horizontal liegenden Punkten befestigt, aber so dass er nicht gespannt ist, so bildet er bekanntlich die Kettenlinie. Nehmen wir die Mitte der beiden Aufhängepunkte zum Anfangspunkt der Coordinaten, die dadurch geführte Horizontale zur $X$ Axe; hierauf senkrecht, vertikal nach unten gerichtet, die positive $Y$ Axe, so wird die Gleichung der Curve entweder:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

$$\text{oder: } x = m . \log \left\{\frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right\}$$

In der letztern Gestalt gehört das untere Zeichen zum absteigenden Theil der Kette und das obere zum aufsteigenden.

Aus der Gleichung $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right); \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{y}{m^2}$$

Die Länge der Subtangente wird $= \dfrac{m\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)}{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}$

- - - Tangente - $= \dfrac{m}{2}\dfrac{\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)^2}{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}$

- - - Subnormale - $= \dfrac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}}-e^{-\frac{2x}{m}}\right)$

- - - Normale - $= \dfrac{m}{4}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 = \dfrac{y^2}{m}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \dfrac{m}{4}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 = \dfrac{y^2}{m}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts: $\begin{cases}\beta = m\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)\\ \alpha = x-\frac{1}{4}m\left(e^{\frac{2x}{m}}-e^{-\frac{2x}{m}}\right)\end{cases}$

Die Gleichung der Evolute wird

$$\alpha = m \log\left\{\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2-4m^2}}{2m}\right\} \mp \frac{\beta\sqrt{\beta^2-4m^2}}{4m}$$

14. Aufg. Untersuchung der gedehnten und verkürzten Cycloide.

Lös. Wenn auf einer festen Geraden ein Kreis rollt, so beschreibt ein Punkt $P_1$, der auf einem bestimmten Radius innerhalb des Kreises liegt, eine gedehnte, und ein Punkt $P^1$, der auf der Verlängerung dieses Radius liegt, eine verkürzte Cycloide. Denkt man sich nun den rollenden Kreis zuerst in einer solchen Lage, dass der Radius, auf welchem der beschreibende Punkt liegt, senkrecht auf der zur Basis dienenden Geraden steht, so nimmt man diesen Punkt in dieser Stellung zum Anfangspunkt der Coordinaten und eine mit der Basis parallele gerade Linie zur Abscisse oder XAxe. Nimmt man alsdann bei irgend einer Lage des gerollten Kreises den Winkel zwischen dem Radius mit dem beschreibenden Punkt und dem mit der XAxe parallelen Radius $\varphi$, so wird die Gleichung der Curve entweder die Coexistenz beider folgenden:

$$\begin{cases} x = r.\varphi - (r+d).\sin\varphi \\ y = r + d - (r+d).\cos\varphi \end{cases}$$

oder: $x = arc\left(\cos = \frac{r+d-y}{r+d}\right) - \sqrt{2(r+d)y - y^2}$

oder die Differentialgleichung

$$dx = \frac{(y-d).dy}{\sqrt{2(r+d)y-y^2}}$$

wo $d$ die Entfernung des beschreibenden Punkts von der Peripherie des Kreises bedeutet.

Nimmt man $d$ positiv, so gehören diese Gleichungen der verkürzten Cycloide an, wird dagegen $d$ negativ genommen, so gehören sie zur gedehnten.

Es wird: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2(r+d)y-y^2}}{y-d}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ry+rd+d^2}{(y-d)^3}$.

Die Gleichung der Tangente wird:

$$(y-d).(\eta - y) = \sqrt{2(r+d)y - y^2}.(\xi - x)$$

Die Gleichung der Normale wird:

$$\sqrt{2(r+d)y-y^2}.(\eta - y) = -(y-d).(\xi - x)$$

Die Länge der Tangente wird $= \frac{y\sqrt{2ry+d^2}}{\sqrt{2(r+d)y-y^2}}$

- - - Subtangente - $= \frac{y(y-d)}{\sqrt{2(r+d)y-y^2}}$

- - - Normale - $= \frac{y\sqrt{2ry+d^2}}{y-d}$

- - - Subnormale - $= \frac{y\sqrt{2(r+d)y-y^2}}{y-d}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{\{2ry+d^2\}^{3/2}}{ry+rd+d^2}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta = \frac{d^3 + dry - ry^2}{ry+rd+d^2} \\ \alpha = arc\left(\cos = \frac{r+d-y}{r+d}\right) + \frac{r(y-d)\sqrt{2(r+d)y-y^2}}{ry+rd+d^2} \end{cases}$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen könnte man offenbar das eliminiren und so die Gleichung der Evolute finden; man erhält aber

dadurch augenscheinlich eine sehr unpraktikable Form, so dass es wohl keinen Zweck hätte, dieselbe hier aufzuschreiben.

15. Aufg. Untersuchung der einfachen Epicycloide und Hypocycloide.

Lös. Wenn die Basis, auf der ein Kreis rollt, nicht wie in der vorigen Aufgabe eine gerade Linie, sondern wieder ein andrer Kreis ist, so beschreibt ein Punkt des rollenden Kreises eine Curve, die Epicycloide oder Hypocycloide genannt wird, je nachdem jener Kreis auf der äussern oder innern Seite des festen Kreises rollt, d. h. je nachdem die beiden Kreise sich von aussen oder von innen berühren. Denkt man sich nun zunächst bei der Epicycloide die beiden Kreise in solcher Lage, dass der für die Beschreibung der Curve auf der Peripherie des rollenden Kreises in der Peripherie des festen Kreises liegt, so soll der von hier ausgehende Durchmesser des festen Kreises zur XAxe und der Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden Der Radius des festen Kreises heisse $r$, der des rollenden $\varrho$. Für irgend eine von der Anfangslage verschiedenen Lage des rollenden Kreises werde noch der Winkel, der von der Centrallinie beider Kreise und von der XAxe gebildet wird, durch $\varphi$ bezeichnet; dann wird die Gleichung der Epicycloide das System folgender beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} x=(r+\varrho)\,.\cos\varphi-\varrho\,.\cos\left(\dfrac{r}{\varrho}+1\right)\varphi \\ y=(r+\varrho)\,.\sin\varphi-\varrho\,.\sin\left(\dfrac{r}{\varrho}+1\right)\varphi \end{array}\right\}$$

Die Gleichung der Hypocycloide erhält man unmittelbar aus dieser Gleichung, wenn man $-\varrho$ an die Stelle von $\varrho$ setzt, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{l} x=(r-\varrho)\,.\cos\varphi+\varrho\,.\cos\left(\dfrac{r}{\varrho}-1\right)\varphi \\ y=(r-\varrho)\,.\sin\varphi-\varrho\,.\sin\left(\dfrac{r}{\varrho}-1\right)\varphi \end{array}\right\}$$

oder wenn man den Winkel $\varphi$ eliminirt, folgende Differentialgleichung für die Epicycloide:

$$\Big[\{(r+2\varrho)^2 y^2+r^2x^2\}.\{x^2+y^2-2r^2\}-4r^2\varrho(r+\varrho)x^2+r^4(r+2\varrho)^2\Big].\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+8\varrho(r+\varrho)xy(x^2+y^2-r^2)\,.\,\frac{dy}{dx}$$
$$+\{(r+2\varrho)^2x^2+r^2y^2\}.\{x^2+y^2-2r^2\}-4r^2\varrho(r+\varrho)y^2+r^4(r+2\varrho)^2=0$$

Dieselbe Gleichung gilt natürlich auch für die Hypocycloide, wenn man darin $\varrho$ mit $-\varrho$ vertauscht.

Die Elimination des $\varphi$ wird ermöglicht durch Hinzuziehung der folgenden Differentialquotienten.

In allen nächsten Formeln bezieht sich das obere Zeichen auf die Epicycloide, das untere dagegen auf die Hypocycloide.

Es wird:

$$\frac{dx}{d\varphi}=-(r\pm\varrho).\sin\varphi\pm(r\pm\varrho).\sin\left(\frac{r}{\varrho}\pm 1\right)\varphi$$
$$=\pm 2(r\pm\varrho).\cos\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi.\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi=\left(\frac{r}{\varrho}\pm 1\right)(r.\sin\varphi-y)$$
$$\frac{dy}{d\varphi}=(r\pm\varrho).\cos\varphi-(r\pm\varrho).\cos\left(\frac{r}{\varrho}\pm 1\right)\varphi$$
$$=2(r\pm\varrho).\sin\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi.\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi=\left(\frac{r}{\varrho}\pm 1\right)(-r\cos\varphi+x)$$

und hieraus

entweder: $\frac{dy}{dx}=\pm\,tang\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi;$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{r}{2\varrho}\pm 1}{2\varrho\left(\frac{r}{\varrho}\pm 1\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi.\sin\frac{r}{2\varrho}\varphi}$$

oder: $\frac{dy}{dx}=-\frac{r.\cos\varphi-x}{r.\sin\varphi-y}$

Die Länge der Tangente wird $=y.\mathrm{cosec}.\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi$

- - - Subtangente - $=\pm y.\mathrm{cotg}\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi$

- - - Normale - $=y.\sec\left(\frac{r}{2\varrho}\pm 1\right)\varphi$

Die Länge der Subnormale wird $= y . tang \left( \frac{r}{2\varrho} \pm 1 \right) \varphi$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \dfrac{2\varrho \left( \frac{r}{\varrho} \pm 1 \right)}{\frac{r}{2\varrho} \pm 1} . sin \frac{r}{2\varrho} \varphi$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\frac{r}{2}}{\frac{r}{2\varrho} \pm 1} . \left\{ \left( \frac{r}{\varrho} \pm 1 \right) sin\, \varphi + sin \left( \frac{r}{\varrho} \pm 1 \right) \varphi \right\} \\ \alpha = \dfrac{\frac{r}{2}}{\frac{r}{2\varrho} \pm 1} . \left\{ \left( \frac{r}{\varrho} \pm 1 \right) cos\, \varphi \pm cos \left( \frac{r}{\varrho} \pm 1 \right) \varphi \right\} \end{cases}$$

Das System dieser beiden Gleichungen bildet zugleich die Gleichung der Evolute, welche offenbar wieder respective eine Epicycloide oder Hypocycloide ist. Um diese Gleichung auf die oben angeführte Form der Gleichung unsrer Curve zurückzuführen, setze man

$$\beta = \beta^1 . cos \frac{\varrho \pi}{r} \pm \alpha^1 . sin \frac{\varrho \pi}{r}$$

$$\alpha = \pm \beta^1 . sin \frac{\varrho \pi}{r} + \alpha^1 . cos \frac{\varrho \pi}{r}$$

$$\varphi = \varphi^1 \pm \frac{\varrho \pi}{r}$$

$$r = 2\varrho^1 . \left( \frac{r^1}{2\varrho^1} \pm 1 \right)$$

$$\varrho = \dfrac{2\varrho^1 \left( \frac{r^1}{2\varrho^1} \pm 1 \right)}{\frac{r^1}{\varrho^1}}$$

dann nimmt sie die gleiche Gestalt wie oben an:

$$\begin{cases} \alpha^1 = \varrho^1 \left( \frac{r^1}{\varrho^1} \pm 1 \right) . cos\, \varphi^1 \mp \varrho^1 . cos \left( \frac{r^1}{\varrho^1} \pm 1 \right) \varphi \\ \beta^1 = \varrho^1 \left( \frac{r^1}{\varrho^1} \pm 1 \right) . sin\, \varphi^1 - \varrho^1 . sin \left( \frac{r^1}{\varrho^1} \pm 1 \right) \varphi \end{cases}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $\frac{r^1}{\varrho^1} = \frac{r}{\varrho}$ d. h. dass das Verhältniss des Radius des rollenden Kreises zu dem des festen Kreises bei der Epi- und Hypocycloide dasselbe ist, als das der Kreise, die ihre Evoluten erzeugen.

Anm. Da der Punkt des rollenden Kreises, welcher beim Anfang der Bewegung auf der Peripherie der Basis lag, bei der beständig fortgesetzten Bewegung unendlich oft wieder die Peripherie der Basis treffen muss, so wird die Curve aus unendlich vielen unter sich congruenten Zügen bestehn, die nur dann zu einem gewissen Abschluss kommen werden, wenn das Verhältniss der Radien beider Kreise $r$ und $\varrho$ ein rationales ist, weil alsdann der beschreibende Punkt nach einer hinreichenden Anzahl von Revolutionen wieder an dieselbe Stelle gelangen wird, von welcher er ausgegangen ist. Wenn die Radien $r : \varrho$ sich so zu einander verhalten, wie $m : n$, so wird die geringste Anzahl der hierzu erforderlichen Umwälzungen des rollenden Kreises ausgedrückt durch den Bruch $\frac{m.h}{n}$, wenn $h$ die kleinste Zahl ist, die diesen Bruch zur ganzen Zahl macht. — Einzelne Beispiele von solchen rationalen Verhältnissen der beiden Kreise mögen hier folgen.

a) Wenn die beiden Radien einander gleich sind, also $\varrho = r$, so entsteht als Epicycloide die sogenannte Cardioide.

Ihre Gleichung wird nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi \\ y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi \end{cases}$$

oder nach der Elimination des Winkels $\varphi$:

$$(x^2+y^2)^2 - 6r^2(x^2+y^2) + 8r^3x - 3r^4 = 0$$

Für diese Gleichung lag der Anfangspunkt der Coordinaten auf der Peripherie des zur Basis dienenden Kreises; verlegt man ihn aber nach dem Mittelpunkt desselben Kreises, setzt also $r - \xi$ für $x$, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$(\xi^2+y^2)^2 - 4r\xi(\xi^2+y^2) - 4r^2y^2 = 0$$

oder endlich, wenn man die gewöhnlichen Polarcoordinaten, also $y = u.\cos t$ und $\xi = u.\sin t$ einführt:

$$u = 2r(1 + \sin t).$$

Es wird:

$$\frac{dy}{dx} = \tang \tfrac{3}{2}\varphi;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8r.\cos^3\frac{3}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{8}{3}r.\sin\frac{1}{2}\varphi$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta = \frac{r}{3}\left\{2\sin\varphi + \sin 2\varphi\right\} \\ \alpha = \frac{r}{3}\left\{2\cos\varphi + \cos 2\varphi\right\} \end{array}\right.$$

welche zusammengenommen zugleich die Gleichung der Evolute bilden. Setzt man $\beta = -\beta^1$, $\alpha = -\alpha^1$, $\varphi = \varphi^1 + \pi$, so wird sie:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta^1 = \frac{r}{3}\left\{2\sin\varphi^1 - \sin 2\varphi^1\right\} \\ \alpha^1 = \frac{r}{3}\left\{2\cos\varphi^1 - \cos 2\varphi^1\right\} \end{array}\right.$$

also die Gleichung einer neuen Cardioide, in welcher sowohl der Radius des festen Kreises, als der des rollenden der dritte Theil von dem ursprünglichen Radius ist.

Nehmen wir die endliche Gleichung der Cardioide zwischen rechtwinkligen Coordinaten und zwar die, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkt des zur Basis dienenden festen Kreises liegt, so war diese:

$$(x^2 + y^2)^2 - 6r^2(x^2 + y^2) + 8r^3x - 3r^4 = 0$$

hieraus ergibt sich:

$$y = \pm\sqrt{3r^2 - x^2 \pm 2r\sqrt{3r^2 - 2rx}}$$

Für $x = -3r$ wird $y = 0$; für grössere negative Werthe von $x$ wird $y$ beständig imaginär; die Tangente in diesem Punkt steht senkrecht auf der XAxe, es ist also ein einfacher Grenzpunkt der Curve nach dieser Seite hin. Setzt man aber $x = +r$, so wird zwar ebenfalls $y = 0$, aber es bleibt $y$ auch noch reell, bis $x = \frac{3}{2}r$ von; hier ab wird es beständig imaginär. In dem Punkte $x = r$ und $y = 0$ ist ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

b) Wenn der Radius des rollenden Kreises die Hälfte von dem des festen ist, also $\varrho = \frac{1}{2} r$, so wird die Gleichung der Epicycloide

$$x = \tfrac{3}{2} r \cos \varphi - \tfrac{1}{2} r \cos 3\varphi$$
$$y = \tfrac{3}{2} r \sin \varphi - \tfrac{1}{2} r \sin 3\varphi$$

oder wenn man $\cos 3\varphi$ und $\sin 3\varphi$ durch den einfachen Winkel ausdrückt und dann $\varphi$ eliminirt:

$$4(x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27 r^4 y^2$$

Es wird:

$$\frac{dx}{d\varphi} = 3r \cos 2\varphi . \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3r \sin 2\varphi . \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = \tang 2\varphi\,; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3r \cos^3 2\varphi . \sin \varphi}$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{3}{2} r \sin \varphi$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{r}{2} \left\{ \tfrac{3}{2} \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \sin 3\varphi \right\} \\ \alpha = \dfrac{r}{2} \left\{ \tfrac{3}{2} \cos \varphi + \tfrac{1}{2} \cos 3\varphi \right\} \end{cases}$$

welches zugleich die Gleichung der Evolute ist, die man auch nach der Elimination des Winkels $\varphi$ so schreiben kann:

$$\left\{ 4\beta^2 + 4\alpha^2 - r^2 \right\}^3 = 27 r^4 \alpha^2$$

Setzt man in diesen Gleichungen: $r = 2r^1$, $\varphi = \varphi^1 + \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \alpha^1$, $\alpha = -\beta^1$, so nehmen sie folgende Gestalt an:

$$\begin{cases} \alpha^1 = r^1 \left\{ \tfrac{3}{2} \cos \varphi^1 - \tfrac{1}{2} \cos 3\varphi^1 \right\} \\ \beta^1 = r^1 \left\{ \tfrac{3}{2} \sin \varphi^1 - \tfrac{1}{2} \sin 3\varphi^1 \right\} \end{cases}$$

und

$$4 . \left\{ \alpha'^2 + \beta'^2 - r'^2 \right\}^3 = 27 r'^4 \beta'^2$$

welches natürlich wieder die Gleichung einer vollkommen ähnlichen Epicycloide ist, bei welcher der Radius des festen Kreises halb so gross ist, als der Radius des ursprünglich gegebenen festen Kreises.

c) Wenn der Radius des rollenden Kreises wieder halb so gross ist, als der Radius des festen, wenn der Kreis aber innerhalb rollt, so wird die Gleichung der Hypocycloide:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} r \cos\varphi \\ y = 0 \end{cases}$$

d. h. die Curve wird die Abscissenaxe, also ein Durchmesser des festen Kreises.

d) Wenn der Radius des rollenden Kreises der dritte Theil vom Radius des festen Kreises ist, so ist die Gleichung der Epicycloide:

$$\begin{cases} x = \frac{r}{3}\left\{4\cos\varphi - \cos 4\varphi\right\} \\ y = \frac{r}{3}\left\{4\sin\varphi - \sin 4\varphi\right\} \end{cases}$$

ferner wird: $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{8}{3} \cdot \cos\frac{5}{2}\varphi \cdot \sin\frac{3}{2}\varphi$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{8}{3} \cdot \sin\frac{5}{2}\varphi \cdot \sin\frac{3}{2}\varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = tang\frac{5}{2}\varphi; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{15}{16 r \cdot \cos^3\frac{5}{2}\varphi \cdot \sin\frac{3}{2}\varphi}$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{16}{15} \cdot \sin\frac{3}{2}\varphi$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = \frac{r}{5}\left\{4\sin\varphi + \sin 4\varphi\right\} \\ \alpha = \frac{r}{5}\left\{4\cos\varphi + \cos 4\varphi\right\} \end{cases}$$

welche Gleichungen natürlich wieder die Evolute bedeuten, die wieder durch die Substitution:

$$\begin{aligned} \beta &= \tfrac{1}{2}\beta' + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \alpha' \\ \alpha &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \beta' + \tfrac{1}{2}\alpha' \\ \varphi &= \varphi' + 60^0 \\ r &= \tfrac{5}{3} r'; \text{ woraus } r' = \tfrac{3}{5} r \end{aligned}$$

in die ursprüngliche Gestalt übergeht:

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{r'}{3} \left\{ 4 \cos \varphi' - \cos 4 \varphi' \right\} \\ \beta' = \frac{r'}{3} \left\{ 4 \sin \varphi' - \sin 4 \varphi' \right\} \end{cases}$$

e) Wenn wieder der Radius des rollenden Kreises der dritte Theil von dem Radius des festen Kreises ist, der erste aber auf der innern Seite des letztern rollt, so wird die Gleichung der Hypocycloide:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} r \left\{ 2 \cos \varphi + \cos 2 \varphi \right\} \\ y = \frac{1}{3} r \left\{ 2 \sin \varphi + \sin 2 \varphi \right\} \end{cases}$$

oder nach Elimination des Winkels $\varphi$:

$$3(r^2 + x^2 + 4rx + y^2)^2 = 4r(r + 2x)^3$$

Hierbei wird: $\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{4}{3} . \cos \frac{1}{2} \varphi . \sin \frac{3}{2} \varphi$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi . \sin \frac{3}{2} \varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi ; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8 \cos^3 \frac{1}{2} \varphi . \sin \frac{3}{2} \varphi}$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{8}{3} . \sin \frac{3}{2} \varphi$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = r . \left\{ 2 \sin \varphi + \sin 2 \varphi \right\} \\ \alpha = r . \left\{ 2 \cos \varphi - \cos 2 \varphi \right\} \end{cases}$$

Diese Gleichungen bilden zugleich die Gleichung der Evolute, welche wie in allen vorhergehenden Beispielen wieder eine der ursprünglichen ähnliche Curve ist.

16. Aufg. Es soll die gedehnte oder verkürzte Epicycloide und Hypocycloide untersucht werden.

Lös. Wenn wieder ein gegebener Kreis auf einem andern gegebenen festen Kreise rollt und wenn mit diesem rollenden Kreise innerhalb oder ausserhalb seiner Peripherie ein Punkt fest verbunden gedacht wird, so beschreibt dieser Punkt eine Epicycloide oder Hypocycloide, je nachdem die Kreise sich von aussen oder von innen be-

rühren, und zwar wird es eine gedehnte oder verkürzte Curve, je nachdem der beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb der Peripherie des bewegten Kreises liegt.

Wenn man sich zunächst die Kreise bei der Berührung von aussen in solcher gegenseitigen Lage denkt, dass die beiden Mittelpunkte und der beschreibende Punkt in einer geraden Linie liegen, jedoch so, dass der beschreibende Punkt nicht zwischen den beiden Mittelpunkten liegt; wenn man dann diese Linie zur XAxe annimmt und den Mittelpunkt des festen Kreises zum Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten; wenn man ferner bei einer beliebigen Lage des rollenden Kreises den Winkel zwischen der Centrallinie beider Kreise mit der soeben genannten XAxe durch $\varphi$ bezeichnet; wenn endlich der Radius des festen Kreises $r$ und der des rollenden Kreises $\varrho$, so wie die Entfernung des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises und zwar von der Peripherie nach aussen gerechnet, $d$ genannt wird, so erhält man als Gleichung der verkürzten Epicycloide:

$$x = (r + \varrho) . \cos\varphi + (\varrho + d) . \cos\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi$$

$$y = (r + \varrho) . \sin\varphi + (\varrho + d) . \sin\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi$$

und als Gleichung der gedehnten Epicycloide:

$$x = (r + \varrho) . \cos\varphi + (\varrho - d) . \cos\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi$$

$$y = (r + \varrho) . \sin\varphi + (\varrho - d) . \sin\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi$$

Indem man nun beide Epicycloiden zusammenfasst, erhält man

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right) . \left\{\sin\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\sin\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \varrho\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right) . \left\{\cos\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\cos\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi\right\}$$

ferner: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right) . \cos\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi}{\sin\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right) . \sin\left(\frac{r}{\varrho} + 1\right)\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right)^2\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right)\left(\frac{r}{\varrho}+2\right).\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}{\varrho\left(\frac{r}{\varrho}+1\right).\left\{\sin\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi\right\}^3}$$

Die Länge der Tangente wird

$$= \frac{\varrho.\left\{\left(\frac{r}{\varrho}+1\right).\sin\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi\right\}.\sqrt{\left(\frac{d}{\varrho}\right)^2+4\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\cos^2\frac{r\varphi}{2\varrho}}}{\cos\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\cos\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi}$$

Die Länge der Subtangente wird

$$= \frac{\varrho.\left\{\left(\frac{r}{\varrho}+1\right).\sin\varphi^2+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right)^2.\sin^2\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right)\left(\frac{r}{\varrho}+2\right).\sin\varphi.\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi\right\}}{\cos\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\cos\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi}$$

Die Länge der Normale wird

$$= \frac{\varrho.\left\{\left(\frac{r}{\varrho}+1\right).\sin\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi\right\}.\sqrt{\left(\frac{d}{\varrho}\right)^2+4\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\cos^2\frac{r\varphi}{2\varrho}}}{\sin\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi}$$

Die Länge der Subnormale wird

$$= \frac{\varrho.\left\{\left(\frac{r}{\varrho}+1\right).\sin\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi\right\}.\left\{\cos\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\cos\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi\right\}}{\sin\varphi+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi}$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{\varrho\left(\frac{r}{\varrho}+1\right).\left\{\left(\frac{d}{\varrho}\right)^2+4\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right).\cos^2\frac{r\varphi}{2\varrho}\right\}^{3/2}}{1+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right)^2\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)+\left(1\pm\frac{d}{\varrho}\right)\left(\frac{r}{\varrho}+2\right).\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}$$

Wenn man sich zweitens bei der Berührung von Innen di
den Kreise anfänglich in solcher gegenseitigen Lage denkt, dass
der die beiden Mittelpunkte und der beschreibende Punkt in ein
raden Linie liegen, hier aber so, dass der beschreibende Punkt
schen die beiden Mittelpunkte fällt, im Uebrigen aber die Coo
ten und die andern Bezeichnungen so wählt, wie vorhin bei der
cycloide, so wird die Gleichung der Hypocycloide:

$$\begin{cases} x = (r-\varrho)\cos\varphi - (\varrho \pm d)\cos\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi \\ y = (r-\varrho)\sin\varphi + (\varrho \pm d)\sin\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi \end{cases}$$

wo das obere Zeichen für die verkürzte, das untere aber fü
gedehnte Hypocycloide giltig ist.

Es ergibt sich:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \varrho\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\left\{-\sin\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\sin\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \varrho\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\left\{\cos\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\cos\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\cos\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi}{-\sin\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\sin\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 - \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)^2\left(\frac{r}{\varrho}-1\right) - \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\left(\frac{r}{\varrho}-2\right)\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}{\varrho\left(\frac{r}{\varrho}-1\right).\left\{-\sin\varphi + \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\sin\left(\frac{r}{\varrho}-1\right)\varphi\right\}^3}$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{\varrho\left(\frac{r}{\varrho}-1\right).\left\{\left(\frac{d}{\varrho}\right)^2 + 4\left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right).\cos^2\frac{r\varphi}{2\varrho}\right\}^{3/2}}{1 - \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)^2\left(\frac{r}{\varrho}-1\right) - \left(1 \pm \frac{d}{\varrho}\right)\left(\frac{r}{\varrho}-2\right)\cos\frac{r}{\varrho}\varphi}$$

Die Ausdrücke für die Coordinaten des Krümmungsmittelp
bei der Epicycloide sowohl als bei der Hypocycloide, werden s
gefügig, dass die Mühe ihrer Ausrechnung nicht belohnt wird.

Auch hier mögen einzelne Beispiele folgen, welche unter der Bedingung specieller Zahlenverhältnisse der Radien beider Kreise und der Distanz des beschreibenden Punktes zu traktablern Resultaten führen.

a) Wenn $d$ die Entfernung des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenden Kreises gleich dem Radius des rollenden, gleich dem des festen Kreises ist, also $d = \varrho = r$, so soll die verkürzte Epicycloide untersucht werden.

Die Gleichung wird:

$$\begin{cases} x = 2r \, . \left\{ \cos\varphi + \cos 2\varphi \right\} \\ y = 2r \, . \left\{ \sin\varphi + \sin 2\varphi \right\} \end{cases}$$

oder: $(x^2 + y^2) - 12r^2 (x^2 + y^2) = 16r^3 x$;

$$y = \pm \sqrt{6r^2 - x^2 \pm 2r \sqrt{9r^2 + 4rx}}$$

Ferner wird: $\frac{dx}{d\varphi} = -2r \left\{ \sin\varphi + 2 \sin 2\varphi \right\}$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2r \left\{ \cos\varphi + 2 \cos 2\varphi \right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + 2\cos 2\varphi}{\sin\varphi + 2\sin 2\varphi} = \frac{4r^3 + 6r^2 x - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) - 6r^2 y}$$

$$= \frac{2r^2 \mp x\sqrt{9r^2 + 4rx}}{\pm y \sqrt{9r^2 + 4rx}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3(3 + 2\cos\varphi)}{2r(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi)^3}$$

Die Länge der Tangente ist $= \frac{2r(\sin\varphi + \sin 2\varphi) . \sqrt{5 + 4\cos\varphi}}{\cos\varphi + 2\cos 2\varphi}$

- - - Subtangente ist $= \frac{2r \sin\varphi^2 (1 + 2\cos\varphi)(1 + 4\cos\varphi)}{\cos\varphi + 2\cos 2\varphi}$

- - - Normale - $= \frac{2r(1 + 2\cos\varphi)\sqrt{5 + 4\cos\varphi}}{1 + 4\cos\varphi}$

- - - Subnormale - $= \frac{2r(1 + 2\cos\varphi)(\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)}{1 + 4\cos\varphi}$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{2r(5 + 4\cos\varphi)^{3/2}}{3(3 + 2\cos\varphi)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{8r.\sin\varphi^3}{3(3+2\cos\varphi)} \\ \alpha = \dfrac{2r(1+6\cos\varphi-4\cos\varphi^3)}{3(3+2\cos\varphi)} \end{cases}$$

Die Curve hat eine Schleife, welche von $x=0$ bis $x=-2r$ reicht; in dem Punkte $x=-2r$, $y=0$ schneiden sich zwei Aeste der Curve, deren Richtungen gegeben sind durch $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{3}$.

b) Wenn der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist, als der des festen, also $\varrho=\frac{1}{2}r$, das $d$ aber noch beliebig, so wird die Gleichung der verkürzten Epicycloide:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}r.\cos\varphi+(\frac{1}{2}r+d).\cos 3\varphi \\ y=\frac{3}{2}r\sin\varphi+(\frac{1}{2}r+d).\sin 3\varphi \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich: $\dfrac{dx}{d\varphi}=-\frac{3}{2}\left\{r.\sin\varphi+(r+2d).\sin 3\varphi\right\}$

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{3}{2}\left\{r.\cos\varphi+(r+2d).\cos 3\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{r.\cos\varphi+(r+2d).\cos 3\varphi}{r.\sin\varphi+(r+2d).\sin 3\varphi}$$

$$=\cotg\varphi.\frac{d-2(r+2d)\cos\varphi^2}{r+d-2(r+2d)\sin\varphi^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{rd+3d^2+2r(r+2d)\cos\varphi^2}{3\sin\varphi^3\left\{d-2(r+2d)\cos\varphi^2\right\}^3}$$

Der Krümmungshalbmesser wird $=\dfrac{3\left\{d^2+r(r+2d)\cos\varphi^2\right\}^{3/2}}{rd+3d^2+2r(r+2d)\cos\varphi^2}$

c) Wenn wieder der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist, als der des festen, wenn sich die Kreise aber von Innen berühren, so wird die Gleichung der verkürzten Hypocycloide:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}r.\cos\varphi-(\frac{1}{2}r+d).\cos\varphi=d.\cos\varphi \\ y=\frac{1}{2}r\sin\varphi+(\frac{1}{2}r+d)\sin\varphi=(r+d)\sin\varphi \end{cases}$$

oder $\dfrac{x^2}{d^2}+\dfrac{y^2}{(r+d)^2}=1$

d. h. es ist eine Ellipse, deren halbe kleine Axe $=d$, halbe grosse Axe $=r+d$ ist.

Wenn $d=0$ wird, geht die Ellipse in einen Durchmesser der Basis über, welcher in der Richtung der $Y$Axe liegt.

d) Wenn der Radius des rollenden Kreises gleich dem der Basis, also $\varrho=r$ ist, so sucht man die gedehnte Epicycloide unter der Bedingung, dass der beschreibende Punkt innerhalb des rollenden Kreises liegt und um dessen halben Radius von der Peripherie entfernt ist, also $d=-\frac{1}{2}\varrho=-\frac{1}{2}r$.

Die Gleichung dieser Curve wird:

$$\begin{cases} x=\frac{r}{2}(4\cos\varphi+\cos 2\varphi) \\ y=\frac{r}{2}(4\sin\varphi+\sin 2\varphi)=r\sin\varphi(2+\cos\varphi) \end{cases}$$

Hieraus $\frac{dx}{d\varphi}=-r(2\sin\varphi+\sin 2\varphi)=-4r\sin\varphi.\cos^2\frac{1}{2}\varphi$

$$\frac{dy}{d\varphi}=r(2\cos\varphi+\cos 2\varphi)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cos\varphi+\cos 2\varphi}{4.\sin\varphi.\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$$

Die Länge der Tangente wird $=\frac{r\sin\varphi(2+\cos\varphi)\sqrt{5+4\cos\varphi}}{2\cos\varphi+\cos 2\varphi}$

- - - Subtangente - $=\frac{4r\sin\varphi^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi.(2+\cos\varphi)}{2\cos\varphi+\cos 2\varphi}$

- - - Normale - $=\frac{r(2+\cos\varphi)\sqrt{5+4\cos\varphi}}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$

- - - Subnormale - $=\frac{r(2+\cos\varphi)(2\cos\varphi+\cos 2\varphi)}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$

- - des Krümmungshalbmessers wird $=\frac{r(5+4\cos\varphi)^{3/2}}{12\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta=\frac{2}{3}r.\sin\varphi.\sin^2\frac{1}{2}\varphi \\ \alpha=r.\frac{2+3\cos\varphi-2\cos\varphi^3}{12\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \end{cases}$$

e) Wenn die Kreise sich von Aussen berühren und der Radius des rollenden Kreises doppelt so gross als der des festen Kreises, also $\varrho=2r$, die Distanz des beschreibenden Punktes $d$ aber gleich

dem Radius des Basis $r$ ist, so wird die Gleichung der verkürzten Epicycloide:

$$\begin{cases} x = 3r.\left\{\cos\varphi + \cos\tfrac{3}{2}\varphi\right\} = 6r.\cos\tfrac{5}{4}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi \\ y = 3r.\left\{\sin\varphi + \sin\tfrac{3}{2}\varphi\right\} = 6r.\sin\tfrac{5}{4}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi \end{cases}$$

woraus $\frac{y}{x} = tang\tfrac{5}{4}\varphi$

oder nach Elimination des Winkels $\varphi$:

$$(x^2+y^2).\left\{(x^2+y^2-18r^2)^2 - 9r^2(x^2+y^2-9r^2)\right\} = 486r^5x.$$

Ferner wird:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -3r.\left\{\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\tfrac{3}{2}\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3r.\left\{\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi}{\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi}$$

oder $$\frac{dy}{dx} = \frac{243r^5 - x.\left\{3(x^2+y^2)^2 - 90r^2.(x^2+y^2) + 405r^4\right\}}{y\left\{3(x^2+y^2)^2 - 90r^2.(x^2+y^2) + 405r^4\right\}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{5(7+6\cos\tfrac{1}{2}\varphi}{24r.(\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\tfrac{3}{2}\varphi)^{3/2}}$$

Die Länge der Tangente wird $= \dfrac{3r.\sin\tfrac{5}{4}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi.\sqrt{13+12\cos\tfrac{1}{2}\varphi}}{\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi}$

- - - Subtangente - $= \dfrac{6r.\sin\tfrac{5}{4}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi.(\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\tfrac{3}{2}\varphi)}{\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi}$

- - - Normale - $= \dfrac{3r.\sin\tfrac{5}{4}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi.\sqrt{13+12\cos\tfrac{1}{2}\varphi}}{\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\tfrac{3}{2}\varphi}$

- - - Subnormale - $= \dfrac{6r.\sin\tfrac{5}{4}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi.(\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi}{\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\tfrac{3}{2}\varphi}$

- - des Krümmungshalbmessers wird $= \dfrac{3(13+12\cos\tfrac{1}{2}\varphi)^{3/2}}{5(7+6\cos\tfrac{1}{2}\varphi)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\beta = \frac{12r.\sin^3\frac{1}{2}\varphi(1+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}$$

$$\alpha = \frac{-3\{9-6\cos\frac{1}{2}\varphi-36\cos^2\frac{1}{2}\varphi+4\cos^3\frac{1}{2}\varphi+24\cos^4\frac{1}{2}\varphi)}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}$$

$$= \frac{6\cos\frac{1}{2}\varphi(2-\cos\varphi)+9(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)}{5(7+6\cos\frac{1}{2}\varphi)}$$

Die Curve schneidet die XAxe in vier Punkten, und zwar bei $x=0$, $x=6r$, $x=\frac{3r(-1\pm\sqrt{5})}{2}$. Von $x=0$ bis $x=\frac{3r(-1+\sqrt{5}}{2}$ bildet die Curve eine Schleife. Die beiden Punkte:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3r(-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3r(-1-\sqrt{5})}{2} \\ y = 0 \end{array}\right\}$$ sind Doppelpunkte;

die wahren Werthe des zuerst in unbestimmter Gestalt erscheinenden ersten Differentialquotienten werden für den ersten Punkt

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$ und für den zweiten Punkt

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

f) Wenn Alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, nur dass der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises liegt, so hat man in der allgemeinen Gleichung der Epicycloide $\varrho = 2r$, $d = -r$ zu setzen und erhält als Gleichung der gedehnten Epicycloide:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r.\{3\cos\varphi + \cos\frac{3}{2}\varphi\} \\ y = r.\{3\sin\varphi + \sin\frac{3}{2}\varphi\} \end{array}\right.$$

oder: $(x^2+y^2-7r^2)^3 - 27r^4(x^2+y^2-13r^2) = 54r^5x$

Ferner wird: $\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{3}{2}r.\{2\sin\varphi + \sin\frac{3}{2}\varphi\}$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{3}{2}r.\{2\cos\varphi + \cos\frac{3}{2}\varphi\}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos\varphi + \cos\frac{3}{2}\varphi}{2\sin\varphi + \sin\frac{3}{2}\varphi}$$

oder: $\frac{dy}{dx} = \frac{27r^5 - x.\left\{3(x^2+y^2-7r^2)^2 - 54r^4\right\}}{y.\left\{3(x^2+y^2-7r^2)^2 - 54r^4\right\}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(11+10.\cos\frac{1}{2}\varphi)}{3r.(2\sin\varphi+\sin\frac{3}{2}\varphi)^3}$$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{3r.(5+4\cos\frac{1}{2}\varphi)^{3/2}}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\beta = \frac{4\sin^3\frac{1}{2}\varphi(1+2\cos\frac{1}{2}\varphi)}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

$$\alpha = \frac{-3-6\cos\frac{1}{2}\varphi+12\cos^2\frac{1}{2}\varphi-4\cos^3\frac{1}{2}\varphi-8\cos^4\frac{1}{2}\varphi}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi(2-\cos\varphi)+2\cos\varphi-\cos 2\varphi}{11+10\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

Die Curve schneidet die X Axe in zwei Punkten und zwar bei $x = 4r$ und bei $x = \frac{-r(3+\sqrt{13})}{2}$. Der Punkt $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-r(3+\sqrt{13})}{2} \\ y = 0 \end{array}\right\}$ ist ein Doppelpunkt, der wahre Werth des in unbestimmter Gestalt erscheinenden Differentialquotienten ist $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{13(7+2\sqrt{13})}{3}}$.

g) Wenn der Radius des rollenden Kreises doppelt so gross ist, als der des festen, also $\varrho = 2r$, und wenn sich die Kreise beständig von Innen berühren, so wird in diesem Fall der rollende Kreis den festen umschliessen. Die Entfernung des beschreibenden Punkts von der Peripherie des rollenden Kreises sei gleich dem Radius des festen, und liege ausserhalb der Peripherie, dann wird die Gleichung der verkürzten Hypocycloide:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3r.\cos\frac{1}{2}\varphi - r.\cos\varphi \\ y = 3r.\sin\frac{1}{2}\varphi - r.\sin\varphi \end{array}\right.$$

oder zwischen den rechtwinkligen Coordinaten allein:

$$\left\{x^2+y^2-10r^2\right\}.\left\{x^2+y^2-r^2\right\}+18r^3(x-r)=0$$

Ferner wird: $\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{r}{2}\left\{3\sin\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi\right\}$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{r}{2}\left\{3\cos\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos\varphi\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\cos\varphi}{3\sin\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi}$$

oder: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{9r^3 + x\left\{9r^2 + 2(x^2 + y^2 - 10r^2)\right\}}{y\left\{9r^2 + 2(x^2 + y^2 - 10r^2)\right\}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{17 - 18.\cos\frac{1}{2}\varphi}{r.(3\sin\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi)^3}$$

Die Länge der Tangente wird

$$= \frac{r\sin\frac{1}{2}\varphi.(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi).\sqrt{13 - 12\cos\frac{1}{2}\varphi}}{3\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\cos\varphi}$$

Die Länge der Subtangente wird

$$= \frac{r\sin^2\frac{1}{2}\varphi.(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi).(3 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi)}{3\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\cos\varphi}$$

Die Länge der Normale wird $= \dfrac{r(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi).\sqrt{13 - 12\cos\frac{1}{2}\varphi}}{3 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi}$

- - - Subnormale -

$$= \frac{r\,(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)\,.\,(3\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\cos\varphi)}{3 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

Die Länge des Krümmungshalbmessers wird $= \dfrac{r\,(13 - 12\cos\frac{1}{2}\varphi)^{3/2}}{17 - 18\cos\frac{1}{2}\varphi}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{12r.\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{17 - 18\cos\frac{1}{2}\varphi} \\ \alpha = \dfrac{-3r(3 - 6\cos\frac{1}{2}\varphi + 4\cos^3\frac{1}{2}\varphi)}{17 - 18\cos\frac{1}{2}\varphi} \end{cases}$$

h) Wenn mit Beibehaltung derselben Bedingungen wie vorhin der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises liegt und wieder in der Entfernung $= r$ von der Peripherie entfernt, so wird die Gleichung der gedehnten Hypocycloide:

$$\begin{cases} x = -r\cos\varphi + r\cos\frac{1}{2}\varphi = 2r.\sin\frac{3}{4}\varphi.\sin\frac{1}{4}\varphi \\ y = -r\sin\varphi + r\sin\frac{1}{2}\varphi = -2r.\cos\frac{3}{4}\varphi.\sin\frac{1}{4}\varphi \end{cases}$$

oder zwischen rechtwinkligen Coordinaten allein:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 3r^2) + 2r^3x = 0.$$

Ferner wird:

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\sin\varphi - \tfrac{1}{2} r\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -r\cos\varphi + \tfrac{1}{2} r\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos\varphi + \cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{-2\cos\varphi + \cos\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{4}\varphi \,.\, \cos\frac{1}{4}\varphi \,.\, (4\cos\frac{1}{2}\varphi - 1)}$$

oder: $$\frac{dy}{dx} = \frac{r^3 - x \,.\, \left\{3r^2 - 2(x^2 + y^2)\right\}}{y \,.\, \left\{3r^2 - 2(x^2 + y^2)\right\}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)}{r \,.\, (2\sin\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi)^{3/2}}$$

Die Länge der Tangente wird

$$= \frac{2r\cos\frac{3}{4}\varphi \,.\, \sin\frac{1}{4}\varphi \,.\, \sqrt{5 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi}}{2\cos\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi}$$

Die Länge der Subtangente wird

$$= \frac{4r\cos\frac{3}{4}\varphi \,.\, \sin^2\frac{1}{4}\varphi \,.\, \cos\frac{1}{4}\varphi\,(4\cos\frac{1}{2}\varphi - 1)}{2\cos\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi}$$

Die Länge der Normale wird $= \dfrac{r\cos\frac{3}{4}\varphi \,.\, \sqrt{5 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi}}{\cos\frac{1}{4}\varphi \,.\, (4\cos\frac{1}{2}\varphi - 1)}$

\- - - Subnormale - $= \dfrac{r\cos\frac{3}{4}\varphi \,.\, (2\cos\varphi - \cos\frac{1}{2}\varphi)}{\cos\frac{1}{4}\varphi \,.\, (4\cos\frac{1}{2}\varphi - 1)}$

\- - des Krümmungshalbmessers wird $= \dfrac{r\,(5 - 4\cos\frac{1}{2}\varphi)^{3/2}}{3\,(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{4r \,.\, \sin^3\frac{1}{2}\varphi}{3\,(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)} \\ \alpha = -\dfrac{r\left\{1 - 6\cos\frac{1}{2}\varphi + 4\cos^3\frac{1}{2}\varphi\right\}}{3\,(3 - 2\cos\frac{1}{2}\varphi)} \end{cases}$$

Die XAxe wird von der Curve in drei Punkten geschnitten, b $x = -2r$, bei $x = 0$ und bei $x = r$. Der Punkt $\left\{\begin{matrix} x = r \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ ist ei Doppelpunkt, die Richtungen der beiden sich hier schneidenden Aes

sind gegeben durch $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{3}$. Auch hat die Curve eine Schleife in der Ausdehnung von $x = 0$ bis $x = r$.

18. Aufg. Es soll die Tractrix oder Tractoria untersucht werden.

Lös. Die gesuchte Curve besitzt bekanntlich die wesentliche Eigenschaft, dass für jeden Punkt derselben die Tangente, gerechnet vom Berührungspunkt bis zum Durchschnitt mit einer in derselben Ebene gegebenen Curve (Directrix), eine constante Grösse $a$ ist. Hiernach ergibt sich die Differentialgleichung der Tractrix durch das System folgender drei Gleichungen:

$$\begin{cases} (y-\eta)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a \\ y-\eta = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \\ \varphi(\xi,\eta) = 0 \end{cases}$$

Hieraus muss man die Grössen $\xi$ und $\eta$ eliminiren, was natürlich nur ausführbar ist, wenn die Natur der Funktion $\varphi$, welche die Gleichung der Directrix darstellt, gegeben ist.

a) Es sei zunächst die einfachste und am häufigsten untersuchte, die Tractoria von Huyghens gegeben.

Hier ist die Directrix eine gerade Linie. Diese sei zugleich die X Axe, so geht die Gleichung $\varphi(\xi,\eta) = 0$ in $\eta = 0$ über und die Gleichung der Tractrix wird:

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Die endliche Gleichung ist: $x = \sqrt{a^2-y^2} - a.\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)$ wobei der Anfangspunkt der Coordinaten in demjenigen Punkte liegt, in welchem die Tangente der Curve die X Axe unter rechtem Winkel schneidet.

Ferner wird: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2 y}{(a^2-y^2)^2}$

Die Länge der Tangente $= a$

Die Länge der Subtangente $= \sqrt{a^2 - y^2}$

- - - Normale $= \frac{ay}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

- - - Subnormale $= \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

- - des Krümmungshalbmessers $= \frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\begin{cases} \beta = \frac{a^2}{y} \\ \alpha = -a \,.\, log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) \end{cases}$$

Die Gleichung der Evolute wird:

$$\beta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)$$

d. h. die Gleichung einer Kettenlinie.

Die Curve hat vier Aeste, welche bei den Punkten $\begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = a \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = -a \end{Bmatrix}$ Rückkehrpunkte oder Spitzen der ersten Art bilden. Hierbei muss man bei der Quadratwurzelgrösse $\sqrt{a^2 - y^2}$ die doppelten Vorzeichen berücksichtigen. Die X Axe ist zugleich Asymptote der Curve.

b) Wenn die Directrix ein Kreis mit dem Radius $r$ ist, so sei der Mittelpunkt desselben der Anfangspunkt der Coordinaten. Denkt man sich für irgend einen Punkt $(x, y)$ der gesuchten Curve die Tangente gezogen, welche den gegebenen Kreis in dem Punkte $(\xi, \eta)$ trifft; zieht man ferner vom Punkt $(x, y)$ nach dem Mittelpunkt des Kreises einen radius vector $= \varrho$ und nennt den Winkel zwischen $\varrho$ und der X Axe $= \varphi$ und bezeichnet man endlich den Winkel, den der nach dem Punkt $(\xi, \eta)$ gezogene Radius des Kreises mit der X Axe bildet, durch $\psi$, so wird:

$$y = \varrho \,.\, \sin\varphi \qquad \eta = r \,.\, \sin\psi$$
$$x = \varrho \,.\, \cos\varphi \qquad \xi = r \,.\, \cos\psi$$

also: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi \,.\, \frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho \,.\, \cos\varphi}{\cos\varphi \,.\, \frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho \,.\, \sin\varphi}.$$

Die beiden Gleichungen:

$$(y - \eta) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a$$

$$y - \eta = \frac{dy}{dx} (x - \xi)$$

gehen über in:

$$\varrho \,.\, \sin\varphi - r \,.\, \sin\psi = \frac{a \,.\, \left\{ \sin\varphi \,.\, \frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho \,.\, \cos\varphi \right\}}{\sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2}}$$

$$\varrho \,.\, \cos\varphi - r \,.\, \cos\psi = \frac{a \,.\, \left\{ \cos\varphi \,.\, \frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho \,.\, \sin\varphi \right\}}{\sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2}}$$

und wenn man hieraus den Winkel $\psi$ eliminirt, so erhält man die Differentialgleichung der gesuchten Tractoria:

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{\sqrt{(\varrho + a + r)(\varrho + a - r)(\varrho - a + r)(-\varrho + a + r)}}{\varrho(\varrho^2 + a^2 - r^2)}$$

oder wenn man: $\sqrt{\frac{(\varrho + a + r)(-\varrho + a + r)}{(\varrho + a - r)(\varrho - a + r)}} = u$ setzt.

$$\varphi = arc. \left( tang = \frac{2au}{(a+r) - (a-r)\,u^2} \right)$$
$$- \frac{2a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot arc. \left( tang = u \sqrt{\frac{a - r}{a + r}} \right)$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)$$

$$= arc\left(tang = \frac{\sqrt{-(a^2-r^2)^2+2(a^2+r^2)(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2}}{(x^2+y^2)-(a^2-r^2)}\right.$$

$$-\frac{2a}{\sqrt{a^2-r^2}}arc\left(tang = \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\sqrt{\frac{(a+r)^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)-(a-r)^2}}\right)$$

Für den speciellen Werth $a = r$ wird das letzte Glied unbestimmt und es geht nach gehöriger Bestimmung seines wahren Werths diese Gleichung in folgende über:

$$\sqrt{\frac{4r^2-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = arc.\left(tang = \frac{x\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}-y\sqrt{x^2+y^2}}{y\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}+x\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}}{x\sqrt{x^2+y^2}-y\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}}$$

c) Man kann auch die Aufgabe umkehren, indem man die Gleichung der Tractoria $f(x,y) = 0$ als gegeben betrachtet und dann diejenige Curve sucht, welche von allen Tangenten der Tractoria ein gegebenes Stück abschneidet.

Wenn man aus den Gleichungen:

$$f(x,y) = 0$$

$$(y-\eta)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a$$

$$y-\eta = \frac{dy}{dx}(x-\xi)$$

die Grössen $x$ und $y$ herauseliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten Curve.

Es sei als Gleichung $f(x,y) = 0$ der Tractoria gegeben:

$$\sqrt{\frac{4r^2-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = arc.\left(tang = \frac{x\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}-y\sqrt{x^2+y^2}}{y\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}+x\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

oder: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}}{x\sqrt{x^2+y^2}-y\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}}$$

und es soll die Curve gefunden werden, welche von allen Tangenten derselben ein Stück $= r$ abschneidet; dann wird

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{2r\sqrt{x^2+y^2}}{y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}},$$

mithin die beiden andern Gleichungen:

$$(y-\eta).\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}}=1$$

$$(x-\xi).\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}-y\sqrt{4r^2-(x^2+y^2)}}=1$$

Setzt man hierin zur Bequemlichkeit der Rechnung:

$$x=\varrho.\sin\varphi$$
$$y=\varrho.\cos\varphi$$

so wird: $\eta=\frac{1}{2}\left\{\varrho.\cos\varphi-\sqrt{4r^2-\varrho^2}.\sin\varphi\right\}$

$$\xi=\frac{1}{2}\left\{\varrho.\sin\varphi+\sqrt{4r^2-\varrho^2}.\cos\varphi\right\}$$

woraus sich ergibt: $\xi^2+\eta^2=r^2$

d. h. die gesuchte Curve ist ein Kreis, dessen Radius $=r$ ist, und dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt.

19. Aufg. Es soll zu einer gegebenen Curve die parallele Curve gefunden werden.

Lös. Wenn man sich für alle Punkte einer gegebenen Curve $f(x,y)=0$ die Normalen gezogen denkt, und auf diesen vorwärts oder rückwärts von dem betreffenden Punkt eine constante Länge $k$ abgetragen denkt, so erhält man dadurch Punkte der äussern oder innern parallelen Curve. Wenn man durch $\xi$ und $\eta$ die laufenden Coordinaten der Normale bezeichnet und wenn man zwischen den Gleichungen:

$$f(x,y)=0$$
$$\eta-y=-\frac{dx}{dy}(\xi-x)$$
$$(\eta-y)^2+(\xi-x)^2=k^2$$

die Grössen $x$ und $y$, oder zwischen den Gleichungen

$$f(x,y)=0$$
$$\left[\frac{d.f(x,y)}{dx}\right]=\left[\frac{d.f(x,y)}{dx}\right].\frac{dy}{dx}=0$$

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy} \cdot (\xi - x)$$

$$(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2 = k^2$$

die drei Grössen $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so erhält man zwischen $\xi$ und $\eta$ die Gleichung der parallelen Curve.

a) Es sei ein Kreis mit dem Radius $r$ gegeben, man suche die parallele Curve.

Hier ist $f(x,y) = y^2 + x^2 - r^2 = 0$

$$x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x)$$

$$(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2 = k^2$$

woraus sich die Gleichung der äussern oder innern parallelen Curve ergibt

$$\eta^2 + \xi^2 = (r \pm k)^2$$

d. h. wieder Kreise, und zwar concentrische.

b) Es sei eine Ellipse mit den beiden Halbaxen $a$ und $b$ gegeben, man sucht die beiden parallelen Curven.

Wenn man $\frac{y}{b} = \varrho \cdot \sin\varphi$ und $\frac{x}{a} = \varrho \cos\varphi$ setzt, so ergibt sich aus der Gleichung der Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ durch Einführung der genannten Werthe $\varrho = 1$, mithin wird $y = b \sin\varphi$ und $x = a \cos\varphi$ und hierdurch

$$\xi = x \pm \frac{k.}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \left\{a \pm \frac{bk}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}\right\} . \cos\varphi$$

$$\eta = y \mp \frac{k \cdot \frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \left\{b \mp \frac{ak}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}\right\} . \sin\varphi$$

Wenn man hieraus den Winkel $\varphi$ eliminirt, erhält man die Gleichung der parallelen Curven.

c) Wenn man für die gewöhnliche Cycloide die parallelen Curven sucht, so sei ihre Gleichung in dieser Gestalt gegeben:

$$\begin{cases} x = r \,.\, \{\varphi - \sin\varphi\} \\ y = r \,.\, \{1 - \cos\varphi\} \end{cases}$$

dann wird die Gleichung der parallelen Curve:

$$\xi = r \,.\, \varphi - \{2r \sin\tfrac{1}{2}\varphi \mp k\} \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\eta = \{2r \sin\tfrac{1}{2}\varphi \mp k\} \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

woraus $\varphi$ eliminirt werden müsste.

20. Aufg. Es soll für eine gegebene Curve die einfüllende Curve gefunden werden.

Lös. Wenn $U = 0$ die Gleichung einer ebenen Curve zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $x$ und $y$, und einer constanten Grösse $\alpha$ bedeutet, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Curve, wenn man zwischen $U = 0$ und $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right] = 0$, (wo $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right]$ der partielle Differentialquotient in Bezug auf $\alpha$ ist) die Grösse $\alpha$ eliminirt.

a) Der Mittelpunkt eines veränderlichen Kreises bewegt sich auf der XAxe so, dass das Quadrat des Radius in jeder Lage gleich der zugehörigen Abscisse $\alpha$ des Mittelpunkts, multiplicirt in eine Constante $m$ ist; es soll die Curve gefunden werden, welche alle diese beweglichen Kreise einhüllt.

Die Gleichung des Kreises in irgend einer Lage wird:

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = m\alpha$$

also der partielle Differentialquotient bezüglich auf $\alpha$:

$$\alpha = \frac{m}{2} + x$$

mithin die Gleichung der einhüllenden Curve:

$$y^2 = mx + \tfrac{1}{4} m^2$$

d. h. eine gewöhnliche apollonische Parabel.

b) Wenn in den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie ($= 2a$) zwei unter einander parallele Linien gezogen sind und wenn sich eine andere Gerade stets so bewegt, dass das Product der durch

sie von den beiden Parallelen abgeschnittenen Stücke einem gegebenen Quadrate $k^2$ gleich ist, so soll die einhüllende Curve dieser beweglichen Geraden gefunden werden.

Wenn die Richtung der gegebenen begrenzten Geraden zur XAxe und die durch ihre Mitte mit den beiden andern gegebenen Geraden parallel gezogenen Linie zur $Y$Axe angenommen wird und wenn man bei einer bestimmten Lage der beweglichen Linie das Stück, welches sie von der $Y$Axe abschneidet, durch $\alpha$ bezeichnet, so werden die beiden Stücke, welche dieselbe von den beiden festen Ordinaten abschneidet,

$$y_1 = \alpha - ca$$
$$y_2 = \alpha + ca$$

wo $c$ noch eine zu bestimmende Constante in der allgemeinen Gleichung $y - \alpha = cx$ der beweglichen Geraden ist. Aus der Bedingung $y_1 \, y_2 = \pm k^2$, folgt $c = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}{a}$. Hier gilt das obere Zeichen, wenn die beiden Ordinatenabschnitte $y_1$ und $y_2$ beide auf einerlei Seite der Abscissenaxe liegen und das untere, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen. Durch Elimination des $\alpha$ aus

$$\alpha - y = \frac{x\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}{a}$$

$$\text{und} \quad 1 = \frac{x \,.\, \alpha}{a\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}$$

erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve entweder:

$$\frac{y^2}{k^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ d. h. eine Ellipse}$$

$$\text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1, \text{ d. h. eine Hyperbel.}$$

c) Eine gerade Linie bewegt sich so, dass sie mit zweien, unter gegebenem Winkel $\lambda$ sich schneidenden, Geraden Dreiecke bildet, die einen constanten Flächeninhalt $k^2$ haben; man sucht die einhüllende Curve dieser Geraden.

Nimmt man die beiden Schenkel des gegebenen Winkels zu Coordinatenaxen an und bezeichnet die Stücke, welche die bewegliche

gerade Linie in einer ihrer Lagen von diesen Axen abschneidet, durch $\alpha$ und $\beta$, so ist die Gleichung dieser Linie

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1$$

oder, da die Fläche des abgeschnittenen Dreiecks $\frac{1}{2}\alpha\beta . sin\lambda=k^2$ sein soll, diese:

$$y.\alpha^2 sin\lambda=2k^2(\alpha-x).$$

Hieraus und aus den partiellen Differentialquotienten nach $\alpha$, nämlich

$$y.\alpha.sin\lambda=k^2$$

erhält man nach Eliminirung des $\alpha$, als Gleichung der einhüllenden Curve:

$$xy=\frac{k^2}{2.sin\lambda}$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, bei welcher die Coordinatenaxen, hier also die beiden gegebenen Geraden, Asymptoten sind.

d) Eine gerade Linie von gegebener Länge $k$ bewegt sich so, dass ihre Endpunkte beständig in zwei auf einander senkrecht stehenden festen Geraden liegen; es wird die einhüllende Curve dieser bewegten Linie gesucht.

Wenn man die festen Geraden zu Coordinatenaxen annimmt und die Stücke, welche von ihnen durch die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen abgeschnitten werden, durch $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet, so hat man:

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1$$

$$\beta^2+\alpha^2=k^2$$

$$\text{also: }\frac{y}{\sqrt{k^2-\alpha^2}}+\frac{x}{\alpha}=1.$$

Wenn man hieraus und aus den partiellen Differentialquotienten, bezüglich auf $\alpha$, das $\alpha$ eliminirt, ergibt sich als Gleichung der einhüllenden Curve:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}.$$

e) Der Mittelpunkt eines Kreises von gegebenem Radius $r$ bewegt sich auf einer gegebenen Curve $f(\alpha,\beta)=0$ oder $\beta=\varphi(\alpha)$, man sucht die Curve, welche alle diese Kreise einhüllt.

Diese Gleichung des Kreises wird:

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi[\alpha])^2=r^2$$

und ihr Differential, bezüglich auf $\alpha$:

$$x-\alpha+(y-\varphi[\alpha])\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen das $\alpha$ eliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten einhüllenden Curve.

Wäre z. B. als leitende Curve ein Kreis unter der Form $\beta=\sqrt{R^2-\alpha^2}$ gegeben, so wäre die Gleichung der einhüllenden Curve

$$x^2+y^2=(R\pm r)^2$$

d. h. wieder ein Kreis mit demselben Mittelpunkt und dessen Radius die Summe oder Differenz der beiden gegebenen Radien ist.

Wäre als leitende Curve die gerade Linie $\beta=a\alpha+b$ gegeben, so wäre die Gleichung der den beweglichen Kreis einhüllenden Curve wieder eine gerade Linie:

$$y=ax+b\pm r.$$

Aus den allgemeinen Gleichungen ergibt sich beiläufig noch:

$$x-\alpha=\pm\frac{r\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}$$

$$y-\beta=\mp\frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}$$

und hieraus, wenn man beides nach $\alpha$ differentiirt: $\frac{dy}{dx}=\frac{d\beta}{d\alpha}$, d. h. die einhüllende Curve ist in jedem Augenblick mit der eingehüllten parallel.

f) Der Mittelpunkt eines Kreises von variabelm Radius bewegt sich auf einer gegebenen Curve, während die Peripherie desselben immer durch einen gegebenen festen Punkt geht. Es soll die einhüllende Curve des bewegten Kreises gefunden werden.

Wenn der feste Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird und die Coordinaten des Mittelpunkts des bewegten Kreises $\alpha$ und $\beta$ sind, so wird die Gleichung dieses Kreises:

$$y^2 + x^2 = 2\beta y + 2\alpha x.$$

Die Gleichung der leitenden Curve sei $f(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = \varphi(\alpha)$, dann wird der Differentialquotient der vorigen Gleichung, bezüglich auf $\alpha$:

$$y \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + x = 0,$$

aus welchen beiden man durch Elimination des $\alpha$ die gesuchte Gleichung der einhüllenden Curve erhält.

Wäre z. B. als leitende Curve ein Kreis mit dem Radius $= r$ und seinem Mittelpunkts-Coordinaten $p$ und $q$ gegeben, wäre also $(\beta - q)^2 + (\alpha - p)^2 = r^2$, so würde die Gleichung der einhüllenden Curve:

$$\left\{ y^2 + x^2 - 2qy - 2px \right\}^2 = 4r^2 (x^2 + y^2)$$

und wenn man den Mittelpunkt des leitenden Kreises in den Anfangspunkt der Coordinaten selbst verlegt, also $p = 0$ und $q = 0$ setzt, so ergibt sich als einhüllende Curve:

$$y^2 + x^2 = 4r^2$$

d. h. ein dem ersten concentrischer Kreis, dessen Radius das Doppelte vom früheren ist.

Nähme man als leitende Curve eine Ellipse mit den beiden Halbaxen $a$ und $b$, mit den Coordinaten ihres Mittelpunkts $p$ und $q$ und denkt man sich die Coordinatenaxen parallel mit den Axen der Ellipse, so würde die Gleichung der den bewegten Kreis einhüllenden Curve:

$$\left\{ y^2 + x^2 - 2qy - 2px \right\}^2 = 4 \left\{ b^2 y^2 + a^2 x^2 \right\}$$

Wenn hierbei der feste Punkt in einem Brennpunkt der Ellipse liegt, so ist die einhüllende Curve ein Kreis, dessen Mittelpunkt im zweiten Brennpunkt liegt und dessen Radius $= 2a$, d. i. die grosse Axe der Ellipse ist.

21. Aufg. Wenn eine ebene Curve gegeben ist und es bewegt sich auf ihr der Mittelpunkt einer Kugel, so soll die einhüllende Oberfläche dieser Kugel gefunden werden.

Lös. Wenn man die Ebene der Curve zur $XY$Ebene annimmt, so sei $\beta = \varphi(\alpha)$ die Gleichung der Curve; ferner sei $r$ der Radius der bewegten Kugel und $\alpha$ die Abscisse ihres Mittelpunkts bei irgend einer Lage; alsdann wird

$$(x-\alpha)^2 + (y - \varphi[\alpha])^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel. Wenn man aus dieser und aus ihrem in Bezug auf $\alpha$ gebildeten ersten Differentialquotienten, nämlich:

$$(x-\alpha) + (y - \varphi[\alpha]) \cdot \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

die Grösse $\alpha$ eliminirt, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Oberfläche.

a) Wenn die ebene Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel des Radius $r$ bewegt, ein Kreis mit dem Radius $\varrho$ ist und wenn dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so dass seine Gleichung $\beta^2 + \alpha^2 = \varrho^2$ wird, so hat man:

$$(x-\alpha)^2 + (y - \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2})^2 + z^2 = r^2$$
$$x\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2} - y\alpha = 0.$$

Eliminirt man hieraus die Grösse $\alpha$, so wird die Gleichung der einhüllenden Oberfläche:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{r^2 - z^2} = \varrho$$

Die beiden vorhergehenden Gleichungen zusammengenommen geben die Gleichung der Charakteristik dieser Oberfläche, die zu dem speciellen Punkt $\alpha$ gehört. Ihre Projection auf die $XY$Ebene ist wie oben

$$x\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2} = y\alpha, \text{ eine gerade Linie}$$

und ihre Projection auf die $XZ$Ebene:

$$(x-\alpha)^2 \cdot \frac{\varrho^2}{\alpha^2} + z^2 = r^2, \text{ ein Kreis.}$$

Es ist also die Charakteristik eine ebene Curve und zwar ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der $XY$Ebene steht. Die Knotenlinie dieser Ebene macht mit der $X$Axe einen Winkel, desen Cosinus $= \frac{\alpha}{\varrho}$ ist. Der Radius ist $= r$ und der Mittelpunkt liegt auf der $X$Axe in der Entfernung $\varrho$ vom Anfangspunkt der Coordinaten.

b) Wenn die leitende Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt der Kugel des Radius $r$ bewegt, eine Ellipse mit den beiden Halbaxen $a$ und $b$ ist und wenn der Mittelpunkt der Ellipse der Anfangspunkt der Coordinaten, so dass ihre Gleichung $\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}=1$ ist, so wird:

$$(x-\alpha)^2+(y-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2})+z^2=r^2$$

also der Differentialquotient in Bezug auf $\alpha$:

$$a^2x=\left\{(a^2-b^2)+\frac{aby}{\sqrt{a^2-\alpha^2}}\right\}.\alpha$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen das $\alpha$ eliminirt, was allerdings ausführbar ist, aber ein sehr unerquickliches Resultat gibt, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Oberfläche. — Nimmt man aber hierzu noch den zweiten Differentialquotienten:

$$0=a^2-b^2+\frac{a^3by}{(a^2-\alpha^2)^{3/2}}$$

und eliminirt nun aus diesen drei Gleichungen das $\alpha$, so erhält man als die beiden zusammengehörigen Gleichungen der Wendungscurve der Oberfläche:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{a}\left\{a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}\right\}.\sqrt{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}} \\ x^2+y^2+z^2-(by)^{\frac{2}{3}}(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}=r^2+a^2-2b^2 \end{cases}$$

c) Wenn die leitende Curve wieder wie in dem ersten Beispiel ein Kreis mit dem Radius $\varrho$ in der $XY$Ebene ist, also seine Gleichung $\beta^2+\alpha^2=\varrho^2$ und wenn sich auf seiner Peripherie der Mittelpunkt eines Ellipsoids mit den drei Halbaxen $a$, $b$, $c$ so bewegt, dass die Axe $2a$ stets parallel mit der $X$Axe bleibt, so hat man

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\sqrt{\varrho^2-\alpha^2})}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Der erste Differentialquotient in Bezug auf $\alpha$ wird:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}.\alpha-\frac{y}{b^2}.\frac{\alpha}{\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}=0$$

und der zweite:

$$(\varrho^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^2\varrho^2 y}{a^2-b^2}.$$

Wenn man aus den beiden ersten Gleichungen das $\alpha$ eliminirt, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Fläche, was aber ein unbequemes Resultat gibt; und wenn man aber aus allen dreien das $\alpha$ eliminirt, so erhält man als die beiden Gleichungen ihrer Wendungscurve:

$$\left\{\begin{array}{l}(b^2\varrho^2 x)^{\frac{2}{3}}+(a^2\varrho^2 y)^{\frac{2}{3}}=\varrho^2(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-3\,\frac{(a^2\varrho^2 y)^{\frac{2}{3}}(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}}{a^2b^2}=1-\frac{\varrho^2(2a^2-b^2)}{a^2b^2}.\end{array}\right.$$

Wenn das Ellipsoid durch Rotation um die $Z$ Axe entstanden ist, so wird $a=b$ und es ergibt sich als Gleichung der einhüllenden Oberfläche:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\varrho+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}.$$

22. Aufg. Eine cylindrische Oberfläche entsteht durch die Bewegung einer Geraden, die während ihrer Bewegung einer andern festen Geraden beständig parallel bleibt. Wenn $x=az$ und $y=bz$ die Gleichung der festen Geraden, wenn ferner $u=0$ und $v=0$ (wo $u$ und $v$ Funktionen von $x$, $y$, $z$ sind) die Gleichung der leitenden Curve ist, so eliminirt man aus

$$u=0,\ v=0,\ y-az=\alpha,\ y-bz=\varphi(\alpha)$$

die Grössen $x$, $y$ und $z$ und erhält dadurch eine Bestimmung der Natur der Funktion $\varphi$. Kennt man aber diese, so ist

$$y-bz=\varphi(x-az)$$

die Gleichung der cylindrischen Oberfläche.

a) Wenn die leitende Curve ein Kreis in der $XY$ Ebene ist, so sind dessen Gleichungen

$$z=0$$

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2$$

nimmt man hierzu

$$x-az=\alpha$$

$$y-bz=\varphi(\alpha)$$

so erhält man als Bestimmungsgleichung der Funktion $\varphi$:

$$\left\{\varphi(\alpha)-B\right\}^2+\left\{\alpha-A\right\}^2=R^2$$

mithin die gesuchte Gleichung des Cylinders

$$(y-bz-B)^2+(x-az-A)^2=R^2.$$

Wenn der Mittelpunkt des gegebenen Kreises zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist, so wird $A=0$ und $B=0$; und wenn die Axe des Cylinders zugleich die $Z$Axe ist, so wird $a=0$ und $b=0$ und daher die Gleichung des gewöhnlichen geraden Kreiscylinders

$$y^2+x^2=R^2.$$

b) Wenn die leitende Curve eine Ellipse in der $XY$Ebene ist, so sei zugleich ihr Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten, dann sind ihre Gleichungen:

$$z=0$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

hierzu kommen:

$$x-az=\alpha$$

$$y-bz=\varphi(\alpha)$$

also nach Elimination des $x$, $y$, $z$:

$$\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\left\{\varphi(\alpha)\right\}^2}{B^2}=1$$

mithin die Gleichung des Cylinders

$$\frac{(x-az)^2}{A^2}+\frac{(y-bz)^2}{B^2}=1.$$

23. Aufg. Die conische Oberfläche entsteht durch die Bewegung einer Geraden, die beständig durch einen festen Punkt $a$, $b$, $c$ und durch eine gegebene leitende Curve $u=0$ und $v=0$ geht.

Man bestimmt aus den Gleichungen

$$u=0,\ v=0,\ \frac{x-a}{z-c}=\alpha,\ \frac{y-b}{z-c}=\varphi(\alpha)$$

durch Elimination der Grössen $x$, $y$, $z$ die Natur der Funktion $\varphi$ und dann wird

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

die gesuchte Gleichung der conischen Oberfläche sein.

a) Wenn die leitende Curve eine Ellipse mit den beiden Halbaxen $A$ und $B$ ist; wenn ferner deren Ebene in der Entfernung $h$ parallel mit der durch den festen Punkt $a$, $b$, $c$ gelegten $XY$ Ebene ist und wenn die bezüglichen $Y$ und $X$ Coordinaten ihres Mittelpunkts $q$ und $p$ sind, so hat man diese Bedingungsgleichungen:

$$z=h$$

$$\frac{(y-q)^2}{B^2}+\frac{(x-p)^2}{A^2}=1$$

$$\frac{x-a}{z}=\alpha$$

$$\frac{y-b}{z}=\varphi(\alpha)$$

woraus sich die Gleichung der conischen Oberfläche ergibt:

$$A^2.\left\{(y-b).h+(b-q).z\right\}^2+B^2.\left\{(x-a).h+(a-p).z\right\}^2=A^2.B^2.z^2$$

Wenn die leitende Curve ein Kreis ist, so hat man nur $A=B=r$ zu setzen.

b) Wenn die leitende Curve eine Lemniscate ist, so sei deren halber Durchmesser $=r$, ihr Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten und deren Ebene die $XY$ Ebene; dann werden die Bedingungsgleichungen:

$$z=0$$

$$(x^2+y^2)^2=r^2.(x^2-y^2)$$

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha$$

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi(\alpha)$$

Hieraus ergibt sich die mit dieser Basis gebildete conische Oberfläche:

$$\left\{(az-cx)^2+(bz-cy)^2\right\}^2=r^2.(z-c)^2.\left\{(az-cx)^2-(bz-cy)^2\right\}$$

c) Wenn die leitende Curve eine apollonische Parabel ist, so sei deren Ebene die $XY$ Ebene und ihr Scheitelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten; dann hat man:

$$z = 0$$
$$y^2 = 2px$$
$$\frac{x-a}{z-c} = \alpha$$
$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi(\alpha)$$

und daraus die Gleichung der conischen Oberfläche:

$$(bz - cy)^2 = 2p(z-c)(az - cx).$$

**24. Aufg.** Wenn eine gegebene Curve $u = 0$, $v = 0$ (wo wieder $u$ und $v$ Funktionen von $x$, $y$ und $z$ sind) um eine gegebene Gerade

$$\begin{cases} x = az + a' \\ y = bz + b' \end{cases}$$

als Drehungsaxe in eine rotirende Bewegung gesetzt wird, so entsteht die sogenannte Rotations-Oberfläche.

Wenn man zuerst aus den Gleichungen

$$u = 0$$
$$v = 0$$
$$ax + by + z = \alpha$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 + z^2 = \varphi(\alpha)$$

die Grössen $x$, $y$, $z$ eliminirt, so wird dadurch die Natur der Funktion $\varphi$ bestimmt und man erhält dann als gesuchte Gleichung der Rotationsfläche:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \varphi(ax + by + z).$$

a) Wenn in der $XZ$Ebene eine Ellipse mit den beiden Halbaxen $A$ und $B$ und den Mittelpunkts-Ordinaten $p$ und $q$ gegeben ist und wenn die $Z$Axe zugleich die Drehungsaxe ist, so hat man zur Bestimmung der Natur von $\varphi$:

$$y = 0$$
$$\frac{(x-p)^2}{A^2} + \frac{(z-q)^2}{B^2} = 1$$

$$z = \alpha$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\alpha)$$

und folglich die Gleichung der Oberfläche:

$$p + \frac{A}{B}\sqrt{B^2 - (z-q)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wenn der Mittelpunkt der Ellipse zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist, also $p = 0$ und $q = 0$, so wird die Oberfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1$$

d. h. das gewöhnliche Ellipsoid, welches durch die Drehung einer Ellipse um die $Z$Axe entstanden ist.

Nimmt man $p = A$ und $q = 0$, so wird

$$AB + A\sqrt{B^2 - z^2} = B\sqrt{x^2 + y^2}$$

die Gleichung einer Oberfläche, welche durch die Drehung einer Ellipse um den Endpunkt der $X$ entstanden ist.

b) Wenn die zu rotirende Curve eine gerade Linie in der $XZ$Ebene und die Rotationsaxe wieder die $Z$Axe ist, so erhält man als Bedingungsgleichungen

$$y = 0$$

$$x = Az + B$$

$$z = \alpha$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\alpha)$$

mithin die Gleichung der Oberfläche

$$Az + B = \sqrt{x^2 + y^2}$$

welches einen Kegel bedeutet. Wenn die erzeugende Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, wenn also $B = 0$ ist, dann liegt der Scheitel des Kegels in diesem Anfangspunkt und die Gleichung wird

$$x^2 + y = A^2 . z^2$$

wo $A$ die Tangente des Winkels bedeutet, welchen die Seitenlinie des Kegels mit dessen Axe bildet.

25. Aufg. Eine Curve doppelter Krümmung entsteht im Allgemeinen durch den Durchschnitt zweier Oberflächen, wird also analytisch durch zwei Gleichungen zwischen drei Coordinaten gegeben sein.

a) Wenn zwei parabolische Cylinder gegeben sind, von denen der eine senkrecht auf der $XY$Ebene, der andere senkrecht auf der $XZ$Ebene steht, so soll ihre Schnittcurve untersucht werden.

Die Gleichung der Curve wird: $\begin{cases} y^2 = 2px \\ z^2 = 2qx \end{cases}$

Hieraus folgt: $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{q}{z}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2xy}; \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{q}{2xz}$$

also die Gleichung der Tangente: $\begin{cases} \eta - y = \frac{p}{y}(\xi - x) \\ \zeta - z = \frac{q}{z}(\xi - x) \end{cases}$

oder: $\begin{cases} \eta = \frac{p}{y} . \xi + \frac{1}{2} y \\ \zeta = \frac{q}{z} . \xi + \frac{1}{2} z \end{cases}$

Die Gleichung der Normalebene:

$$\frac{q}{z}(\zeta - z) + \frac{p}{y}(\eta - y) + (\xi - x) = 0$$

oder: $\xi + \frac{p}{y}\eta + \frac{q}{z} . \zeta - (x + p + q) = 0$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt bis zur $YZ$Ebene wird:

$$x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)}$$

bis zur $XZ$Ebene wird:

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = 2\sqrt{x\left(x + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)}$$

bis zur $XY$Ebene wird:

$$z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = 2\sqrt{x\left(x + \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)}$$

Die Knotenlinien der Normalebenen werden:

in der $YZ$Ebene: $\frac{p}{y} . \eta + \frac{q}{z} . \zeta - (x + p + q) = 0$

in der $XZ$Ebene: $\xi + \frac{q}{z} . \zeta - (x + p + q) = 0$

- - $XY$ - $\xi + \frac{p}{y} . \eta - (x + p + q) = 0$

Die Gleichung der Krümmungsebene, welche im Allgemeinen ist:

$$(\xi - x) . (dy . d^2z - dz . d^2y) + (\eta - y) . (dz . d^2x - dx . d^2z) + (\zeta - z) . (dx . d^2y - dy . d^2x) = 0$$

wird hier: $\zeta = \frac{qy}{pz} . \eta$

Der Krümmungshalbmesser wird $= \frac{(p + q + x)^{3/2}}{\sqrt{p + q}}$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\alpha = 3x + p + q$$
$$\beta = -\frac{4px^2}{y(p + q)} = -\frac{2xy}{p + q}$$
$$\gamma = -\frac{4qx^2}{z(p + q)} = -\frac{2xz}{p + q}$$

b) Während in der vorigen Aufgabe beide Cylinder parabolisch waren, mag jetzt der eine von beiden ein Kreiscylinder sein; dann werden die beiden zusammengehörigen Gleichungen der Schnittcurve:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z^2 + x^2 = a^2 \end{cases}$$

Es wird $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2xy}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{a^2}{z^3}$$

Die Gleichung der Tangente: $\begin{cases} \eta - y = \frac{p}{y} . (\xi - x) \\ \zeta - z = -\frac{x}{z} (\xi - x) \end{cases}$

oder: $\begin{cases} \eta = \frac{p}{y} . \xi + \frac{1}{2} y \\ \zeta = -\frac{x}{z} . \xi + \frac{a^2}{z} \end{cases}$

eichung der Normalebene:

$$-\frac{x}{z}(\zeta-z)+\frac{p}{y}(\eta-y)+(\xi-x)=0$$

oder: $\xi+\frac{p}{y}.\eta-\frac{x}{z}.\zeta-p=0$

inge der Tangente vom Berührungspunkt

r $YZ$Ebene wird: $\frac{x}{yz}.\sqrt{a^2y^2+p^2z^2}$

- $XZ$ - .. $\frac{y}{pz}\sqrt{a^2y^2+p^2z^2}$

- $XY$ - - $-\frac{1}{yz}\sqrt{a^2y^2+p^2z^2}$

notenlinien der Normalebene werden:

: $YZ$Ebene: $\frac{p}{y}.\eta-\frac{x}{z}.\zeta-p=0$

$XZ$ - $\xi-\frac{x}{z}.\zeta-p=0$

$XY$ - $\xi+\frac{p}{y}.\eta-p=0$

leichung der Krümmungsebene wird:

$$z^3.\zeta-a^2y^3.\eta+p^2x.(3a^2-x^2).\xi-p^2a^2.(a^2-3x^2)=0$$

Krümmungshalbmesser wird

$$=\frac{(a^2y^2+p^2z^2)^{3/2}}{pa.\sqrt{a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)}}$$

Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\alpha=\frac{p.\left\{a^2y^2(z^4+2a^2x^2)+\frac{1}{2}z^4(a^2y^2+2p^2z^2)\right\}}{a^2.\left\{a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)\right\}}$$

$$\beta=\frac{y.\left\{a^2y^2(2x^2+y^2)+z^2(2p^2x^2-a^2y^2)\right\}}{a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)}$$

$$\gamma=\frac{p^2z^3\left\{a^2(z^2-2px)+x(pz^2+2a^2x)\right\}}{a^2\left\{a^2y^2(4x^2+y^2)+p^2z^2(4x^2+z^2)\right\}}$$

c) Man untersuche die Curve, welche durch den Schnitt zw Kreiscylinder entsteht, die wieder respective auf der $XY$ und auf $XZ$Ebene senkrecht stehn.

Die Gleichung der Curve ist:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$$

Ferner wird: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ; $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{y}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{b^2}{z^3}$$

Die Gleichung der Tangente:

$$\begin{cases} \eta - y = -\frac{x}{y}(\xi - x) \\ \zeta - z = -\frac{x}{z}(\xi - x) \end{cases}$$

oder: $\begin{cases} \eta y + \xi x = a^2 \\ \zeta z + \xi x = b^2 \end{cases}$

Die Gleichung der Normalebene:

$$(\xi - x) - (\eta - y)\frac{x}{y} - (\zeta - z)\frac{x}{z} = 0$$

oder: $\frac{\xi}{x} - \frac{\eta}{y} - \frac{\zeta}{z} + 1 = 0.$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

bis zur $YZ$Ebene wird $= x^2 . \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$

- - $XZ$ - - $= y^2 . \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$

- - $XY$ - - $= z^2 . \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$

Die Knotenlinien der Normalebene werden:

in der $YZ$Ebene: $\frac{\eta}{y} + \frac{\zeta}{z} - 1 = 0$

- - $XZ$ - $\frac{\xi}{x} - \frac{\zeta}{z} + 1 = 0$

- - $XY$ - $\frac{\xi}{x} - \frac{\eta}{y} + 1 = 0$

Die Gleichung der Krümmungsebene wird:

$$x(b^2y^2-a^2z^2).\xi+b^2y^3.\eta-a^2z^3.\zeta-a^2b^2y^2+a^2b^2z^2=0$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$=\frac{(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)^{3/2}}{\sqrt{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2}}$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts werden:

$$\alpha=x^3,\frac{(a^2z^2-b^2y^2)^2-x^2y^2z^2(a^2z^2+b^2y^2)}{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2}$$

$$\beta=b^2y^3.\frac{x^4y^2+a^2b^2y^2-2a^2x^2z^2}{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2}$$

$$\gamma=a^2z^3\frac{x^4z^2+a^2b^2z^2-2b^2x^2y^2}{a^4b^2z^4+a^2b^4y^4-2a^2b^2x^2y^2z^2}$$

d) Man untersuche die Curve, welche bei dem Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer Kugel entsteht.

Wenn der gemeinsame Mittelpunkt beider Oberflächen der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so wird die Gleichung ihrer Durchschnittscurve:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x^2+y^2+z^2=r^2\end{cases}$$

Hieraus:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}};\ \frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}.\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right).\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2.y^3};\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2.z^3}$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$\eta=-\left(\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}\right).\frac{x}{y}.\xi+\frac{1-\frac{r^2}{c^2}}{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).y}$$

$$\zeta = -\left(\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\right)\frac{x}{z}.\xi + \frac{1-\frac{r^2}{b^2}}{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right).z}$$

Die Gleichung der Normalebene wird:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).\frac{\xi}{x}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right).\frac{\eta}{y}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{\zeta}{z}=0$$

Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt

bis zur $YZ$Ebene wird $= \frac{rx}{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).yz}.\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}}$

- - $XZ$ - - $= \frac{ry}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right).xz}.\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}}$

- - $XY$ - - $= \frac{rz}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).xy}.\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}}$

Die Gleichungen der Knotenlinien der Normalebenen werden:

in der $YZ$Ebene: $\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{\eta}{y}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{\zeta}{z}=0$

- - $XZ$ - $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\xi}{x}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{\zeta}{z}=0$

- - $XY$ - $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\xi}{x}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{\eta}{y}=0$

Die Gleichung der Krümmungsebene wird:

$$\left.\begin{array}{l}(\xi-x).x^3.\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right).\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\\ +(\eta-y).y^3.\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right).\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right).\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\\ +(\zeta-z).z^3.\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right).\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right).\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)\end{array}\right\}=0$$

Wenn man der Kürze wegen folgende Bezeichnung einführt:

$$M=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2.\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2.\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)^2.z^6$$

$$+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2.\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2.\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)^2.y^6$$

$$+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) \cdot x^6$$

so wird der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{r\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c_2}\right)^3 \cdot y^3 \cdot z^3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}}}{\sqrt{M}}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts:

$$\alpha = x + \frac{x y^2 z^2 r^2}{M} \cdot \left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}\right\} \cdot \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^3 \cdot \left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)y^4 - \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)z^4\right\}$$

$$\beta = y - \frac{y^3 z^2 r^2}{M} \cdot \left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}\right\} \cdot \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right) \cdot \left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right)z^4 - \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)x^4\right\}$$

$$\gamma = z - \frac{y^2 z^3 r^2}{M} \cdot \left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\frac{1}{r^2}\right\} \cdot \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) \cdot \left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)y^4 + \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)x^4\right\}$$

**26. Aufgabe.** Es soll eine gegebene Oberfläche untersucht werden.

a) Wenn ein Ellipsoid mit den drei Halbaxen $a$, $b$, $c$ gegeben ist, also:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

so wird: $\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}$

Die Gleichung der Tangentenebene:

$$\zeta - z + (\eta - y) \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z} + (\xi - x)\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z} = 0$$

oder: $\frac{z}{c^2} \cdot \zeta + \frac{y}{b^2} \cdot \eta + \frac{x}{a^2} \cdot \xi = 0$

Die Cosinusse der Winkel, welche diese Tangentenebene

mit der $YZ$ Ebene bildet $= \dfrac{-\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$

- - $XZ$ - - $= \dfrac{-\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$

- - $XY$ - - $= \dfrac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$

Die Gleichung der Normale wird: $\begin{cases} \xi - x = (\zeta - z).\dfrac{c^2}{a^2}.\dfrac{x}{z} \\ \eta - y = (\zeta - z).\dfrac{c^2}{b^2}.\dfrac{y}{z} \end{cases}$

oder: $\begin{cases} \dfrac{\xi z}{c^2} - \dfrac{\zeta x}{a^2} = xz\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right) \\ \dfrac{\eta z}{c^2} - \dfrac{\zeta . y}{b^2} = yz\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) \end{cases}$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkt bis

zur $YZ$ Ebene wird $= \dfrac{c^2 x}{z}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}$

- $XZ$ - - $= \dfrac{c^2 y}{z}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}$

- $XY$ - - $= c^2.\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Berührungskugel, deren willkührlich bleibender Radius durch $\varrho$ bezeichnet werden mag, werden;

$$\alpha = x - \frac{\frac{\varrho x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\beta = y - \frac{\frac{\varrho y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\gamma = z - \frac{\frac{\varrho z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Der Radius der grössten und kleinsten Krümmung wird:

$$= \Bigg[ -\frac{a^2 b^2 c^2}{2} \cdot \left\{ \frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \right\}$$

$$\pm \frac{a^2 b^2 c^2}{2} \cdot \sqrt{ \left\{ \frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \right\}^2 - 4\frac{x^2 y^2}{a^4 b^4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) } \Bigg] \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

b) Wenn man das elliptische Paraboloid untersuchen will, so kann man dessen Gleichung unter der Form $4pp^1z = px^2 + p^1y^2$ schreiben.

Es wird:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{2p^1}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y}{2p}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2p^1}; \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{2p}; \quad \frac{d^2z}{dx \,.\, dy} = 0$$

Die Gleichung der Tangentenebene ist:

$$\zeta + z = \frac{x}{2p} \cdot \xi + \frac{y}{2p} \cdot \eta$$

Die Ausdrücke für die Cosinusse der Winkel, welche die Tangentenebene mit den Coordinatenebenen bilden, werden

mit der $YZ$ Ebene $= \frac{px}{\sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}}$

- - $XZ$ - $= \frac{p^1 y}{\sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}}$

- - $XY$ - $= \frac{2pp^1}{\sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}}$

Die Gleichung der Normale wird: $\begin{cases} \zeta + \frac{2p^1}{x} . \xi = 2p^1 + z \\ \zeta + \frac{2p}{y} . \eta = 2p + z \end{cases}$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkt bis zum Durchschnitt

mit der $YZ$Ebene wird $= \frac{x}{2pp^1} . \sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}$

- - $XZ$ - - $= \frac{y}{2pp^1} . \sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}$

- - $XY$ - - $= \frac{z}{2pp^1} . \sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}$

Für die Coordinaten des Mittelpunkts der Berührungskugeln erhält man

$$\alpha = x + . \frac{px . \varrho}{\sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}}$$

$$\beta = y + \frac{p^1y . \varrho}{\sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}}$$

$$\gamma = z + \frac{2pp^1 . \varrho}{\sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}}$$

Hierin ist der Radius $\varrho$ noch willkührlich. Bestimmt man ihn so, dass er zur grössten und zur kleinsten Krümmung gehört, so wird

$$\varrho = \left[ \frac{-1}{8p^2p'^2} \left\{ 4p^3 + 4p'^3 + py^2 + p'x^2 \right\} \pm \frac{1}{8p^2p'^2} . \sqrt{\left\{ 4p^3 - 4p'^3 + py^2 - p'x^2 \right\}^2 + 4pp'x^2y^2} \right] . \sqrt{4p^2p'^2 + p^2x^2 + p'^2y^2}$$

c) Wenn man die gewöhnliche Lemniscate um ihren Durchmesser gedreht denkt, so entsteht eine Oberfläche, deren Gleichung wird:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2).$$

Wenn man der Kürze wegen $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$ setzt und dabei $x$ als Funktion der beiden unabhängig Veränderlichen $y$ und $z$ betrachtet, so wird:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y.(a^2+2m^2)}{x.(a^2-2m^2)};\quad \frac{dx}{dz}=\frac{z(a^2+2m^2)}{x(a^2-2m^2)}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{(a^4-4m^4).\{(a^2-2m^2)x^2-(a^2+2m^2)y^2\}+16a^4x^2y^2}{x^3.(a^2-2m^2)^3}$$

$$\frac{d^2x}{dy.dz}=\frac{yz.\{16a^4x^2-(a^4-4m^4)(a^2+2m^2)\}}{x^3.(a^2-2m^2)^3}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{(a^4-4m^4).\{(a^2-2m^2)x^2-(a^2+2m^2)z^2\}+16a^4x^2z^2}{x^3(a^2-2m^2)^3}$$

Die Gleichung der Tangentenebene wird:

$$(a^2-2m^2)x.\xi=(a^2+2m^2)y.\eta+(a^2+2m^2)z.\zeta-m^4.$$

Es werden die Cosinusse der Winkel, welche diese Ebene bildet,

mit der $YZ$ Ebene $=\dfrac{x.(a^2-2m^2)}{a^2m}$

- - $XZ$ - $=\dfrac{y.(a^2+2m^2)}{a^2m}$

- - $XY$ - $=\dfrac{z.(a^2+2m^2)}{a^2m}$

Die Gleichung der Normale wird:

$$\begin{cases}(a^2+2m^2)y.\xi+(a^2-2m^2)x.\eta=2a^2xy\\(a^2+2m^2)z.\xi+(a^2-2m^2)x.\zeta=2a^2xz\end{cases}$$

Die Länge der Normallinie vom Berührungspunkt bis zum Durchschnitt

mit der $YZ$ Ebene wird $=\dfrac{a^2m}{a^2-2m^2}$

- - $XZ$ - - $=\dfrac{a^2m}{a^2+2m^2}$

- - $XY$ - - $=\dfrac{a^2m}{a^2+2m^2}$

Wenn man die Krümmungshalbmesser der respectiven kleinsten und grössten Krümmung durch $\varrho'$ und $\varrho''$ und ebenso die Coordinaten der bezüglichen Krümmungsmittelpunkte durch $\alpha'\beta'\gamma'$ und $\alpha''\beta''\gamma''$ theilt, so erhält man für diese Stücke folgende Ausdrücke:

$$\varrho' = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ; \quad \varrho'' = \frac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2}$$

$$\alpha' = \frac{(+x^2+y^2+z^2+a^2).x}{3(x^2+y^2+z^2)} \quad ; \quad \alpha'' = \frac{2a^2x}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2}$$

$$\beta' = \frac{(x^2+y^2+z^2-a^2).y}{3(x^2+y^2+z^2)} \quad ; \quad \beta'' = 0$$

$$\gamma' = \frac{(x^2+y^2+z^2-a^2).z}{3(x^2+y^2+z^2)} \quad ; \quad \gamma'' = 0$$

d) Wenn wir wieder die Lemniscate nehmen, aber sie nicht wie in der vorigen Aufgabe um die $X$Axe, sondern jetzt um die $Y$Axe drehn, so entsteht dadurch natürlich eine ganz andre Oberfläche, deren Gleichung ist:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2+z^2).$$

Wenn man hier ebenso wie vorhin $x^2+y^2+z^2=m^2$ setzt, und dabei $y$ als eine Funktion der beiden unabhängig Veränderlichen $x$ und $z$ betrachtet, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(a^2-2m^2)}{y(a^2+2m^2)} \quad ; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z(a^2-2m^2)}{y(a^2+2m^2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^4-4m^4).\left\{(a^2+2m^2)y^2-(a^2-2m^2)x^2\right\}-16a^4x^2y^2}{y^3(a^2+2m^2)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx.dy} = \frac{-xz\left\{16a^4y^2+(a^4-4m^4)(a^2-2m^2)\right\}}{y^3(a^2+2m^2)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{(a^4-4m^4).\left\{(a^2+2m^2)y^2-(a^2-2m^2)z^2\right\}-16a^4y^2z^2}{y^3(a^2+2m^2)^3}$$

Die Gleichung der Tangentenebene wird:

$$(a^2+2m^2)y.\eta = (a^2-2m^2)x.\xi + (a^2-2m^2)z.\zeta + m^4.$$

Ferner werden die Cosinusse der Winkel, welche diese Tangentenebene mit den Coordinatenebenen bilden, nämlich

mit der $YZ$Ebene $= \dfrac{x.(a^2-2m^2)}{a^2m}$

- - $XZ$ - $= \dfrac{y(a+m^2)}{a^2m}$

- - $XY$ - $= \dfrac{z(a^2-2m^2)}{a^2m}$

Die Gleichung der Normale wird:

$$\begin{cases}(a^2-2m^2)\,x.\eta+(a^2+2m^2)\,y.\xi=2a^2xy\\(a^2-2m^2)\,z.\eta+(a^2+2m^2)\,y.\zeta=2a^2yz\end{cases}$$

Die Länge der Normallinie vom Punkte $xyz$ bis zum Durchschnitt

mit der $YZ$Ebene wird $=\dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}$

- - $XZ$ - - $=\dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2+2x^2+2y^2+2z^2}$

- - $XY$ - - $=\dfrac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}$

Wenn hier auch wieder die Radien der kleinsten und grössten Krümmung durch $\varrho'$ und $\varrho''$ und die Coordinaten der bezüglichen Krümmungsmittelpunkte durch $\alpha'$ $\beta'$ $\gamma'$ und $\alpha''$ $\beta''$ $\gamma''$ bezeichnet werden, so erhält man:

$$\varrho'=\frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\;;\quad \varrho''=\frac{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}$$

$$\alpha'=\frac{x(x^2+y^2+z^2+a^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}\;;\quad \alpha''=0$$

$$\beta'=\frac{y(x^2+y^2+z^2+a^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}\;;\quad \beta''=\frac{2a^2y}{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}$$

$$\gamma'=\frac{z(x^2+y^2+z^2+a^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}\;;\quad \gamma''=0.$$

---

# VII. Unbestimmte Integrale von Funktionen einer einzigen Variabeln.

Wenn man die Integration zur wirklichen Lösung vorgegebener Probleme anwenden will, so kann bekanntlich nur von sogenannten **bestimmten** Integralen, d. h. von solchen die Rede sein, welche zwischen gegebenen Grenzen eingeschlossen sind. Von diesen soll jedoch in gegenwärtigem Abschnitt noch nicht die Rede sein, sondern es soll hier einzig und allein nur darauf ankommen, Beispiele zu liefern, die zur Einübung in dem rein Technischen des Integrirens dienlich sind. Eben deshalb wird auch jeder Zeit die Hinzufügung der Constanten der Integration unterbleiben, weil sie einer Seits zum genannten Zweck nichts beiträgt und andrer Seits zu viel Raum fortnimmt; jedoch soll hierbei irgend ein beliebiger Theil der Constanten ganz nach Willkühr mit in das Resultat hineingezogen werden, wenn dieses dadurch eine schicklichere Form erhält, so dass also, wenn man z. B. bei einer Integration als Resultat erhält

$log . \left\{ \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} \right\}$, hierfür geradezu geschrieben werden darf

$2 . log \, (\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})$, indem eigentlich $log \left\{ \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} \right\} + C$

das Resultat wäre und dieses sich leicht umwandelte in

$log \frac{\left\{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right\}^2}{2a} + C$ oder in $2 \, log \left\{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right\} - log 2a + C$

oder in $2 \, log \left\{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right\} + C^1$, wo $C^1$ eine neue willkührliche Constante bedeutet, die aus den obigen Gründen fortgelassen wird.

### A. Integration algebraischer rationaler Funktionen.

### §. 13.

Jede algebraische rationale Funktion lässt sich bekanntlich auf diese Form bringen:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots + \frac{F(x)}{f(x)}$$

wo $F(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots$
und $f(x) = x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \dots$

ist. Hierbei darf man sogar noch annehmen, dass $\frac{F(x)}{f(x)}$ ein echter Bruch ist, d. h. dass $m$ kleiner als $n$, da bei einer unecht gebrochenen Form die darin enthaltenen ganzen Zahlen zuerst durch einfache Division abgesondert werden können. Dann wird man ferner schreiben dürfen:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q (x-\gamma)^r \dots} =$$

$$\frac{A_p}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-\alpha)^{p-1}} + \frac{A_{p-2}}{(x-\alpha)^{p-2}} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{B_q}{(x-\beta)^q} + \frac{B_{q-1}}{(x-\beta)^{q-1}} + \frac{B_{q-2}}{(x-\beta)^{q-2}} + \dots + \frac{B_1}{x-\beta}$$
$$+ \frac{C_r}{(x-\gamma)^r} + \frac{C_{r-1}}{(x-\gamma)^{r-1}} + \frac{C_{r-2}}{(x-\gamma)^{r-2}} + \dots + \frac{C_1}{x-\gamma}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

worin alle Zähler $A$, $B$, $C, \dots$ constante von $x$ unabhängige Grössen sind. Wenn man $(x-\beta)^q.(x-\gamma)^q \dots$ d. h. das Product aller Factoren im Nenner des gegebenen Bruchs, welche von $(x-\alpha)$ verschieden sind durch $\varphi(x)$ bezeichnet und wenn ferner $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$, $\varphi'''(\alpha) \dots$ respective die Funktion $\varphi(x)$ oder deren ersten, zweiten, dritten u. s. w. Differentialquotienten bedeutet, wenn man nach der Differentiation $\alpha$ für $x$ gesetzt hat, so erhält man folgendes Bildungsgesetz für die Zähler $A$:

$$F(\alpha) = \varphi(\alpha).A_p$$
$$F'(\alpha) = \varphi'(\alpha).A_p + \varphi(\alpha).1\,A_{p-1}$$
$$F''(\alpha) = \varphi''(\alpha).A_p + 2_1.\varphi'(\alpha).1\,A_{p-1} + \varphi(\alpha).1.2.A_{p-2}$$
$$F'''(\alpha) = \varphi'''(\alpha).A_p + 3_1.\varphi''(\alpha).1.A_{p-1} + 3_2.\varphi'(\alpha).1.2.A_{p-2} + \varphi(\alpha).1.2.3\,A_{p-3}$$
$$F^{IV}(\alpha) = \varphi^{IV}(\alpha).A_p + 4_1.\varphi'''(\alpha).1.A_{p-1} + 4_2.\varphi''(\alpha).1.2.A_{p-2} + 4_3.\varphi'(\alpha).1.2.3\,A_{p-3} + \varphi(\alpha).1.2.3.4\,A_{p-4}$$

u. s. w. f.

Hieraus wird man der Reihe nach die Werthe von $A_n$, $A_{n-1}$, $A_{n-2}$ u. s. w. berechnen können. Die mit unten angehängten Indices versehenen Zahlcoefficienten bedeuten wie gewöhnlich die Binomialcoefficienten der entsprechenden Potenzen. — Für die Bestimmung der übrigen Zähler, d. h. für die verschiedenen $B$, $C$, etc., gelten natürlich ganz analoge Regeln. —

In dem speciellen Fall, dass $p = 1$ ist, d. h. wenn ein solcher Factor $(x - \alpha)$ nur ein einziges Mal in dem gegebenen Nenner enthalten, kann man den zugehörigen Zähler noch auf eine etwas bequemere Weise berechnen; es wird dann nämlich $\varphi(\alpha) = f'(\alpha)$, mithin $A = \frac{F(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Nach dem Bisherigen wird sich also das Integral jeder algebraischen rationalen Funktion, also

$$\int \left\{ A + Bx + (x^2 + \ldots + \frac{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \ldots}{x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \ldots} \right\} . dx$$

jeder Zeit zurückführen lassen auf die beiden Integrale

$$\int x^s . dx \text{ und } \int \frac{1}{(x - a)^s} . dx$$

welche leicht genug bestimmt werden können, da nach einfacher Umkehrung der Regeln der Differentialrechnung das erste $\frac{x^{s+1}}{s+1}$ und das zweite $\frac{-1}{(s-1)(x-a)^{s-1}}$ gibt.

Bei dem zweiten Integral muss man noch den speciellen Fall beachten, wenn $s = 1$ ist, also $\int \frac{1}{x-a} . dx$ gegeben ist, dann erhält man $\int \frac{1}{x-a} . dx = log\ (x - a)$, ein Resultat, welches anscheinend in der vorhin genannten allgemeinen Form nicht enthalten ist, welches sich ihr aber dennoch unterordnet, wenn man die Constante der Integration beachtet, oder wenn man zwischen Grenzen integrirt.

Wenn ein solcher einzeln vorkommender Factor des Nenners ein imaginärer ist, so muss sich, nach einer bekannten Regel aus der

Theorie der algebraischen Gleichungen, auch noch der ihm conjugirte Factor in demselben Product vorfinden; wenn also der eine Factor die Form $x-\alpha-\beta.i$ (wo $i$, wie immer $=\sqrt{-1}$) hat, so muss es noch einen zugehörigen Factor von der Form $x-\alpha+\beta.i$ geben. Bei der Zerlegung des Bruchs $\frac{F(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche werden die diesen beiden Factoren entsprechenden Brüche folgende sein:

$$\frac{M+N.i}{x-\alpha-\beta.i}+\frac{M-N.i}{x-\alpha+\beta.i}$$

worin $M+N.i=\frac{F(\alpha+\beta.i)}{f'(\alpha+\beta.i)}$ und $M-N.i=\frac{F(\alpha-\beta.i)}{f'(\alpha-\beta.i)}$ ist. Mithin wird

$$\int\left\{\frac{M+N.i}{x-\alpha-\beta.i}+\frac{M-N.i}{x-\alpha+\beta.i}\right\}.dx=(M+N.i).\log(x-\alpha-\beta.i)$$
$$+(M-N.i).\log(x-\alpha+\beta.i)$$
$$=M.\log(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)+N.i.\log\left(\frac{x-\alpha-\beta i}{x-\alpha+\beta i}\right)$$

Andrer Seits ist aber auch

$$\int\left\{\frac{M+N.i}{x-\alpha-\beta.i}+\frac{M-N.i}{x-\alpha+\beta.i}\right\}.dx=2M\int\frac{(x-\alpha).dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$
$$-2N\int\frac{d.\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$
$$=M.\log(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)-2N.arc\left(tang=\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Hier ergibt sich beiläufig die in der Integralrechnung sehr häufig anwendbare Relation zwischen einem in imaginärer Gestalt erscheinenden Logarithmus und einer reellen cyclometrischen Funktion. Stellen wir diese Beziehungen im Allgemeinen zusammen, so sind es folgende:

$$arc\,(tang=z)=\frac{1}{2i}.\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)=\frac{1}{2i}.\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}i.\log\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)=\tfrac{1}{2}i.\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

$$arc(\sin = z) = \frac{1}{i}.\log\left\{\sqrt{1-z^2}+iz\right\} = i.\log\left\{\sqrt{1-z^2}-iz\right\}$$

$$arc(\cos = z) = \frac{1}{i}.\log\left\{z + i\sqrt{1-z^2}\right\} = i.\log\left\{z - i\sqrt{1-z^2}\right\}$$

Eine besondere Erleichterung gewährt beim Integriren die Methode der Substitution oder die Einführung einer neuen Variabeln; das dahin gehörige Gesetz spricht sich. in Zeichen so aus: wenn $x = \varphi(z)$ gesetzt wird, so ist

$$\int f(x).dx = \int f\{\varphi(z)\}.\left\{\frac{d.\varphi(z)}{dz}\right\}.dz$$

Ein andrer sehr wesentlicher Hilfssatz ist der Satz von der theilweisen Integration, welcher, wenn $u$ und $v$ Funktionen von $x$ bedeuten, so lautet:

$$\int u.\frac{dv}{dx}.dx = u.v - \int v.\frac{du}{dx}.dx$$

Häufig ist es auch zweckmässig, die zum Integriren gegebene Funktion in mehre Summanden zu zerlegen und diese einzeln, vielleicht mit Hilfe verschiedener Substitutionen, zu integriren.

## §. 14.

### Beispiele.

1) $\int a.f(x).dx = a\int f(x).dx$

2) $\int x.dx = \frac{1}{2}x^2$

3) $\int x^2.dx = \frac{1}{3}x^3$

4) $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1}$

5) $\int \frac{1}{x^2}.dx = -\frac{1}{x}$

6) $\int \frac{1}{x^n}.dx = -\frac{1}{(n-1).x^{n-1}}$

7) $\int \frac{1}{x} . dx = log . x$

8) $\int \frac{1}{1+x^2} . dx = arc\,(tang = x)$

9) $\int \sqrt{x^3} . dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$

10) $\int 5 \sqrt[3]{x^2} . dx = 3 . \sqrt[3]{x^5}$

11) $\int \frac{3}{4 \sqrt[4]{x^7}} . dx = -\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

12) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{4 x^3}} . dx = 4 \sqrt{2} . \sqrt[4]{x}$

13) $\int (5 - 3x + 5x^2 + 7x^3) . dx = 5x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3 + \frac{7}{4} x^4$

14) $\int \left( \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^5} \right) . dx = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}$

15) $\int \left( \frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 4 + 7x^6 \right) . dx = -\frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x} + 3\,log\,x$
$- 4x + x^7$

16) $\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} . dx = (\frac{21}{7} x^2 + 6) . \sqrt[3]{x}$

17) $\int (2 + 5x)^2 . dx = 4x + 5x^2 + \frac{25}{3} x^3$

18) $\int x^2 (2x + 3x^2)^3 . dx = 2x^4 + \frac{36}{5} x^5 + 9x^6 + \frac{27}{7} x^7$

19) $\int (1 - 3x + 2x^2)^2 . dx = x - 3x^2 + \frac{13}{3} x^3 - 3x^4 + \frac{4}{5} x^5$

20) $\int x^2 (3 + 4 \sqrt[3]{x^2})^3 . dx = 9x^3 + \frac{324}{11} x^3 \sqrt[3]{x^2} + \frac{432}{13} x^4 \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{64}{5} x^5$

21) $\int \sqrt[3]{x} . (\sqrt{x} - 2 \sqrt[3]{x^2})^3 . dx = \frac{6}{17} x^2 \sqrt[6]{x^5} - 2x^3 + \frac{72}{19} x^3 \sqrt[6]{x}$
$- \frac{12}{5} x^3 \sqrt[3]{x}$

22) $\int (2\sqrt[3]{x} + \frac{6x}{\sqrt[3]{x}} - 9\,x)^2 \,.\, dx = 27\,x^3 - \frac{81}{2}\,x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2$
$+ \frac{12}{5}\,x\sqrt[3]{x^2}$

23) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{x} \,.\, \left(6\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 .\, dx = 2\sqrt[3]{x}\,.\,\Big\{\frac{54}{5}x\sqrt[3]{x}$
$+ \frac{108}{11}\,x\sqrt{x} + \frac{27}{7}\sqrt[6]{x^5} + \frac{72}{7}\sqrt[4]{x} + 9 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x}\Big\}$

24) $\int \sqrt[6]{x^5}\,.\,(\sqrt{x}+1)\,.\,(2-\sqrt{x})^2 .\, dx = \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} - \frac{18}{17}\,x^2\sqrt[6]{x^5}$
$+ \frac{3}{10}\,x^3\sqrt[3]{x}$

25) $\int (\sqrt{x^3} - 2\sqrt[3]{x^2})^2 .\, (\sqrt{x^3} + 4\sqrt[3]{x^2})\,.\, dx = x^3 .\Big\{\frac{2}{11}\,x^2\,\sqrt{x}$
$- \frac{72x}{23\sqrt[6]{x}} + \frac{16}{3}\Big\}$

26) $\int 4\,x^7\,(12 - x^3)\,(6 - \frac{1}{5}\,x^3)^3 .\, dx = (6\,x^2 - \frac{1}{5}\,x^4)^4$

27) $\int \frac{3\,x^2}{a^3 + x^3} .\; dx = \;log\;(a^3 + x^3)$

28) $\int \frac{3\,b + 6\,c\,x}{5\,(a^2 + b\,x + c\,x^2)} \,.\, dx = \frac{3}{5}\,log\,(a^2 + b\,x + c\,x^2)$

29) $\int \frac{2\,n\,x - 4\,p\,x^3}{m - nx^2 + px^4} .\, dx = -log(m - nx^2 + px^4) = log\frac{1}{m - nx^2 + px^4}$

30) $\int \frac{2 - 4\,x}{1 - 4x + 4x^2} \,.\, dx = log\,\frac{1}{1 - 2\,x}$

31) $\int \frac{5 + x}{10\,x + x^2} .\; dx = \frac{1}{2}\,log\,(10\,x + x^2)$

32) $\int \frac{3}{4 + 2\,x} .\, dx = \frac{3}{2}\,.\,log\,(4 + 2\,x)$

33) $\int \frac{5x}{2 + 3x} .\, dx = \frac{5}{3}\,x - \frac{10}{9}\,.\,log\,(2 + 3\,x)$

34) $\int \frac{7x}{4 + 5x^2} .\, dx = \frac{7}{10}\,.\,log\,(4 + 5\,x^2)$

35) $$\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\cdot dx = \frac{-1}{4(2+3x^2)^2}$$

36) $$\int \frac{3+10x}{(4+3x+5x^2)^2}\cdot dx = -\frac{1}{4+3x+5x^2}$$

37) $$\int \frac{3x^3}{1+2x}\cdot dx = \tfrac{1}{18}x^3 - \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{24}x - \tfrac{1}{48}\log\,(2x+1)$$

38) $$\int \frac{x^5}{(3+x)^2}\cdot dx = \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \tfrac{27}{2}x^2 - 108x - 519\tfrac{3}{4}$$

$$+ 405\log(3+x) + \frac{243}{3+x}$$

39) $$\int \frac{x^2}{(4-2x)^3}\cdot dx = -\frac{x^3-6x^2+12}{8(x-2)^2} - \tfrac{3}{4}\log(x-2)$$

40) $$\int \frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2}\cdot dx = \frac{1+3x-3x^2}{3(x-1)^3}$$

41) $$\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4}\cdot dx = -\frac{(29-30x+18x^2)}{(x-2)^3} + \log(x-2)$$

42) $$\int \frac{(x^4-3x)}{(1+2x)^5}\cdot dx = \left\{2x^3 + \tfrac{9}{4}x^2 + \tfrac{23}{12}x + \tfrac{49}{192}\right\}\cdot\frac{1}{(1+2x)^4}$$

$$+ \tfrac{1}{16}\log\,(1+2x)$$

43) $$\int \frac{5}{x^2(5-6x)^2}\cdot dx = \left(-\frac{1}{x} + \tfrac{12}{5}\right)\frac{1}{5-6x} - \tfrac{12}{25}\log\left(\frac{5-6x}{x}\right)$$

[man muss hier $\frac{5}{x} - 6$ gleich einer neuen Variabeln setzen.]

44) $$\int \frac{x^5}{(2x+3x^2)^6}\cdot dx = -\frac{3x}{64(2+3x)^5}\cdot\Big\{80 + 360x + 660x^2$$

$$+ \tfrac{1125}{2}x^3 + \tfrac{3699}{20}x^4\Big\} + \tfrac{1}{64}\log\left(\frac{x}{2+3x}\right)$$

45) $$\int \frac{x^6-x^3+1}{x^6(3+2x)^2}\cdot dx = \frac{1}{2430x^5(2+3x)}\cdot\Big\{486 - 486x$$

$$+ 540x^2 - 2835x^3 + 2070x^4 + 8044x^5 + 26x^6\Big\} + \tfrac{1}{729}\log\left(\frac{3+2x}{x}\right)$$

46) $$\int \frac{3x+2}{x^2-x-2}\cdot dx = \tfrac{8}{3}\log(x-2) + \tfrac{1}{3}\log(x+1)$$

47) $$\int \frac{x^2+1}{x^3-x}.dx = log(x+1) + log(x-1) - log\, x = log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

48) $$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}.dx = \tfrac{9}{10}\, log(x-2) - \tfrac{26}{15}\, log(x+3) + \tfrac{5}{6}\, log\, x$$

49) $$\int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2+x+2}.dx = 4\, log(x+1) + 3\, log(x-2)$$
$$+ 2\, log(x-1) = log\left\{(x+1)^4.(x-2)^3.(x-1)^2\right\}$$

50) $$\int \frac{5x^2-7ax+11a^2}{x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3}.dx = \tfrac{9}{2}\, log(x-a)$$
$$-17\, log(x-2a) + \tfrac{35}{2}\, log(x-3a)$$

51) $$\int \frac{7x^2+6}{x^4-5x^3}.dx = \tfrac{181}{125}\, log(x-5) + \frac{3}{5x^2} + \frac{6}{25x} - \tfrac{181}{125}\, log\, x$$
$$= \frac{3(5+2x)}{25x^2} + \tfrac{181}{125}\, log\left(\frac{x-5}{x}\right)$$

52) $$\int \frac{3x^2+4}{x^3+x^2-8x-12}.dx = \frac{16}{5(x+2)} + \tfrac{44}{25}\, log(x+2)$$
$$+ \tfrac{31}{25}\, log(x-3)$$

53) $$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.dx = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$
$$+ 2\, log(x-1) - log\, x$$

54) $$\int \frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}.dx = -\frac{133}{8(x-3)^2} - \frac{407}{16(x-3)}$$
$$+ \tfrac{313}{64}\, log(x-3) + \tfrac{7}{64}\, log(x+1)$$

55) $$\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1} = -\frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}$$
$$+ log(x-1) + \frac{1}{x+1} - 2\, log(x+1)$$
$$= -\frac{(2x^2+7x-3)}{2(x^3-x^2-x+1)} + log.\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

56) $$\int \frac{1}{x^3-x^4-x^5+x^6}.dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)}$$
$$+ 2\, log\, x - \tfrac{7}{4}\, log(1-x) - \tfrac{1}{4}\, log(1+x)$$

57) $$\int \frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}\cdot dx = \tfrac{35}{37}\log\left(\frac{x-5}{\sqrt{x^2+12}}\right) + \frac{42}{37\sqrt{3}}\cdot arc\left(tang = \frac{x}{2\sqrt{3}}\right)$$

58) $$\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\cdot dx = -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + arc\ (tang = x)$$

59) $$\int \frac{2x^3+3}{x^5-9x}\cdot dx = \tfrac{1}{12}\log(x^4-9)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left(\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right) - \tfrac{1}{3}\log x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arc\left(tang = \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

60) $$\int \frac{1-2x^2}{1-x^3}\cdot dx = \tfrac{1}{3}\log(x-1)+\tfrac{5}{6}\log(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}arc\left(cotg = \frac{2x+1)}{\sqrt{3}}\right)$$

61) $$\int \frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3}\cdot dx = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}+\tfrac{1}{8}\log\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) + \log\left(\frac{x+1}{x}\right)-\tfrac{1}{4}\cdot arc\,(tang = x)$$

62) $$\int \frac{5x^3+8x-20}{(x-3)^3(x^2-4x+8)}\cdot dx = -\frac{83}{4(x-4)^2}-\frac{41}{4(x-4)} - \tfrac{46}{16}\log(x-4)+\tfrac{45}{32}\log(x^2-4x+8)-\tfrac{3}{16}arc\,(cotg = \tfrac{1}{2}x-1)$$

63) $$\int \frac{3x+2}{x^4+5x^3+13x^2+17x+12}\cdot dx = \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+4}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}arc\left(targ = \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{13}{2\sqrt{7}}arc\left(tang = \frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)$$

64) $$\int \frac{2x^2+2}{x^4+x^2+1}\cdot dx = \frac{2}{\sqrt{3}}arc\left(tg = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}arc\left(tg = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

65) $$\int \frac{4x^6-4x^4-4x^2}{x^8-2x^6-x^4-2x^2+1}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\frac{x^2-x\sqrt{3}+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+\frac{1}{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}arc\left(tg = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}arc\left(tg = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

66) $$\int \frac{x^3}{x^6-2x^5+x^4+x^2-2x+1} \cdot dx = -\frac{1}{2(x-1)}$$
$$+\tfrac{1}{2} log(x-1) - \frac{1+\sqrt{2}}{4} arc(tg = x\sqrt{2}-1)$$
$$-\frac{1-\sqrt{2}}{4} arc(tg = x\sqrt{2}+1)$$

67) $$\int \frac{1}{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{1}{a} arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)$$

68) $$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2} \cdot dx = \frac{1}{2a^3}\left\{\frac{ax}{a^2+x^2} + arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)\right\}$$

69) $$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^p} \cdot dx = \frac{1}{(2p-2)a^2} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{p-1}}$$
$$+ \frac{(2p-3)}{(2p-2)a^2} \cdot \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{p-1}} \cdot dx$$

70) $$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^p} \cdot dx = \frac{1}{(p-1).(2a^2)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{p-1}}$$
$$+ \frac{(2p-3)}{(p-1)(p-2).(2a^2)^2} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{p-2}}$$
$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)}{(p-1)(p-2)(p-3).(2a^2)^3} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{p-3}}$$
$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)(2p-7)}{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4).(2a^2)^4} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{p-4}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.5.3}{(p-1)(p-2)\ldots.2.1.(2a^2)^{p-1}} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)}$$
$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.5.3.1}{(p-1)(p-2)\ldots.2.1.a.(2a^2)^{p-1}} \cdot \frac{1}{a} arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{x}{2p-1} \cdot \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\ldots(2p-2k+1)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)\ldots(2p-2k)} \cdot \frac{1}{a^{2k}(a^2+x^2)^{p-k}}$$
$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)(2p-7)\ldots.5.3.1}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)\ldots 6.4.2} \cdot \frac{1}{a^{2p-1}} \cdot arc\left(tang = \frac{x}{a}\right)$$

71) $$\int \frac{1}{(a^2-x^2)^p} \cdot dx$$
$$= \frac{x}{2p-1} \cdot \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\ldots(2p-2k+1)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)\ldots(2p-2k)} \cdot \frac{1}{a^{2k}(a^2-x^2)^{p-k}}$$

$$+\frac{(2p-3)(2p-5)(2p-7)\ldots.5.3.1}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)\ldots.6.4.2}\cdot\frac{1}{2a^{2p-1}}\cdot log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

72) $$\int\frac{1}{a^3+x^3}\cdot dx=\frac{1}{6a^2}\,log\,\frac{(a+x)^2}{a^2-ax+x^2}$$
$$+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\,arc\left(tang=\frac{x\sqrt{3}}{2a-x}\right)$$

73) $$\int\frac{x}{a^3+x^3}\cdot dx=-\frac{1}{6a}\,log\,\frac{(a+x)^2}{a^2-ax+x^2}$$
$$+\frac{1}{a\sqrt{3}}\,arc\left(tang=\frac{x\sqrt{3}}{2a-x}\right)$$

74) $$\int\frac{x^2}{a^3+x^3}\cdot dx=\tfrac{1}{3}\,log\,(a^3+x^3)$$

75) $$\int\frac{1}{a^4+x^4}\cdot dx=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\left\{log\left(\frac{a^2+ax\sqrt{2}+x^2}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}\right)\right.$$
$$\left.+2\,.\,arc\left(tang=\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right)\right\}$$

76) $$\int\frac{x}{a^4+x^4}\cdot dx=\frac{1}{2a^2}\left(tang=\frac{x^2}{a^2}\right)$$

77) $$\int\frac{x^2}{a^4+x^4}\cdot dx=\frac{1}{4a\sqrt{2}}\left\{-log\left(\frac{a^2+ax\sqrt{2}+x^2}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}\right)\right.$$
$$\left.+2\,arc\left(tang=\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right)\right\}$$

78) $$\int\frac{x^3}{a^4+x^4}\cdot dx=\tfrac{1}{4}\,log\,(a^4+x^4)$$

79) $$\int\frac{1}{a^4-x^4}\cdot dx=\frac{1}{4a^3}\cdot\left\{log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+2\,arc\left(tang=\frac{x}{a}\right)\right\}$$

80) $$\int\frac{x}{a^4-x^4}\,dx=\frac{1}{4a^2}\,log\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right)$$

81) $$\int\frac{x^2}{a^4-x^4}\,dx=\frac{1}{4a}\left\{log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)-2\,arc\left(tang=\frac{x}{a}\right)\right\}$$

82) $$\int\frac{x^3}{a^4-x^4}\cdot dx=-\tfrac{1}{4}\,log\,(a^4-x^4)$$

83) In dieser und den folgenden 3 Nummern soll folgende abkürzende Bezeichnung gelten:

$$\tfrac{1}{2} \log\left(a^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{5} + x^2\right) = P_0 \quad ; \quad arc\left(\tang = \frac{x \sin\frac{\pi}{5}}{a - x\cos\frac{\pi}{5}}\right) = Q_0$$

$$\tfrac{1}{2} \log\left(a^2 + 2ax\cos\frac{2\pi}{5} + x^2\right) = P_1 \quad ; \quad arc\left(\tang = \frac{x \sin\frac{2\pi}{5}}{a + x\cos\frac{2\pi}{5}}\right) = Q_1$$

Dann wird

$$\int \frac{dx}{a^5 + x^5} = \frac{2}{5a^4} \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} \log(x+a) - P_0 \cos\frac{\pi}{5} + P_1 \cos\frac{2\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{\pi}{5} + Q_1 \sin\frac{2\pi}{5} \right\}$$

84) $$\int \frac{x\,.\,dx}{a^5 + x^5} = \frac{2}{5a^3} \cdot \left\{ -\tfrac{1}{2} \log(x+a) - P_0 \cos\frac{2\pi}{5} + P_1 \cos\frac{\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{2\pi}{5} - Q_1 \sin\frac{\pi}{5} \right\}$$

85) $$\int \frac{x^2\,.\,dx}{a^5 + x^5} = \frac{2}{5a^2} \left\{ \tfrac{1}{2} \log(x+a) + P_0 \cos\frac{2\pi}{5} - P_1 \cos\frac{\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{2\pi}{5} - Q_1 \sin\frac{\pi}{5} \right\}$$

86) $$\int \frac{x^3\,.\,dx}{a^5 + x^5} = \frac{2}{5a} \left\{ -\tfrac{1}{2} \log(x+a) + P_0 \cos\frac{\pi}{5} - P_1 \cos\frac{2\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{\pi}{5} + Q_1 \sin\frac{2\pi}{5} \right\}$$

87) $$\int \frac{x^4\, dx}{a^5 + x^5} = \tfrac{1}{5} \log(a^5 + x^5)$$

88) In dieser und der folgenden Formel soll folgende Bezeichnung gelten:

$$\tfrac{1}{2} \log\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right) = P_k$$

$$arc\left(tang = \frac{x \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}}{1 - x \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}}\right) = Q_k$$

Dann wird, wenn $n$ gerade ist:

$$\int \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}-1} P_k . \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$+ \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n=\frac{n}{2}-1} Q_k . \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

89) und wenn $n$ ungerade ist:

$$\int \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n} \log (1+x) - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} P_k . \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$+ \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n=\frac{n-3}{2}} Q_k . \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

90) Wenn diese Bezeichnung gilt:

$$\tfrac{1}{2} \log\left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right) = P_k$$

$$arc\left(tang = \frac{x \sin \frac{2k\pi}{n}}{1 - x \cos \frac{2k\pi}{n}}\right) = Q_k$$

dann wird für ein gerades $n$:

$$\int \frac{dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} P_k . \cos \frac{2k\pi}{n}$$

$$+ \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} Q_k . \sin \frac{2k\pi}{n}$$

91) Um das Integral für ein ungerades $n$ zu erhalten, darf man nur in Nr. 89 das $x$ mit $-x$ vertauschen.

92) $$\int \frac{9}{(3+x^2)^3} \cdot dx = \frac{3x(x^2+5)}{8(3+x^2)^2} + \tfrac{1}{8}\sqrt{3}\, arc\left(tang = x\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$

93) $$\int \frac{x^2}{12+5x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{5}x - \frac{6}{5\sqrt{15}}\, arc\left(tang = \tfrac{1}{2}x\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)$$

94) $$\int \frac{27x^6}{2+3x^2} \cdot dx = \tfrac{9}{5}x^5 - 2x^3 + 4x - \frac{8}{\sqrt{6}}\, arc\left(tang = x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$

95) $$\int \frac{11x^3}{(15-9x^2)^3} \cdot dx = \frac{11\left(x^2 - \frac{5}{6}\right)}{162(5-3x^2)^2}$$

96) $$\int \frac{128x^4}{(x^2-1)^5} \cdot dx = \frac{3x^7 - 11x^5 - 11x^3 + 3x}{(x^2-1)^4} + \tfrac{3}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

97) $$\int \frac{1}{x+x^3} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

98) $$\int \frac{9}{5x^2(3-2x^2)^3} \cdot dx = \left\{-\frac{3}{5x} + \frac{5}{4}x - \tfrac{1}{2}x^3\right\} \cdot \frac{1}{(3-2x^2)^2}$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{6}}\log\left(\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right)$$

99) $$\int \frac{8}{15x^3(x^2-5)^5} \cdot dx = \left\{\frac{4}{75x^2} - \frac{1}{9} + \frac{52}{1125}x^2 - \frac{14}{1875}x^4\right.$$
$$\left. + \frac{4}{9375}x^6\right\} \cdot \frac{1}{(x^2-5)^4} - \frac{4}{46875}\log\left(\frac{x^2}{x^2-5}\right)$$

100) $$\int \frac{3x^6+4x^2}{12x^4(x^2+1)^3} \cdot dx = -\left\{\frac{19}{32}x^3 + \frac{103}{96}x + \frac{1}{3x}\right\}\frac{1}{(x^2+1)^2}$$
$$- \frac{19}{32}\, arc\,(tang = x)$$

101) $$\int \frac{6x^5}{3-2x^3} \cdot dx = -x^3 - \tfrac{3}{2}\log(3-2x^3)$$

$$102)\int\frac{24x^4}{(27+8x^3)^2}\cdot dx=-\frac{x^2}{27+8x^3}-\frac{1}{96}\log\left\{\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{48}\sqrt{3}\cdot arc\left(tang=\frac{x\sqrt{3}}{3-x}\right)$$

$$103)\int\frac{6x^5}{(5-7x^3)^3}dx=\frac{x^6}{5(5-7x^3)^2}$$

$$104)\int\frac{15}{x^4(5+3x^3)^2}dx=\frac{6}{25}\log\left(\frac{5+3x^3}{x^3}\right)-\frac{5+6x^3}{5x^3(5+3x^3)}$$

$$105)\int\frac{x}{4-x^4}\cdot dx=\frac{1}{8}\log\left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)$$

$$106)\int\frac{x^9}{2+5x^4}\cdot dx=\frac{x^6}{30}-\frac{x^2}{5}-\frac{2}{25\sqrt{10}}arc\left(tang=\frac{\sqrt{2}}{x^2\sqrt{5}}\right)$$

$$107)\int\frac{12x^{15}}{(1+x^4)^2}\cdot dx=\frac{3x^4(x^8-3x^4-6)}{2(1+x^4)}+9\log(1+x^4)$$

$$108)\int\frac{8}{7x+3x^5}\cdot dx=\frac{2}{7}\log\left(\frac{x^4}{7+3x^4}\right)$$

$$109)\int\frac{20}{x^5(1-x^4)^2}\cdot dx=10.\log\left(\frac{x^4}{1-x^4}\right)-\frac{5(1-2x^4)}{x^4(1-x^4)}$$

$$110)\int\frac{x^2}{1-x^6}\cdot dx=-\frac{1}{6}\log\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)$$

$$111)\int\frac{1}{x(3+5x^6)}\cdot dx=\frac{1}{18}\log\left(\frac{x^6}{3+5x^6}\right)$$

$$112)\int\frac{12}{x^7(x^6-2)}\cdot dx=\frac{1}{x^6}-\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x^6}{x^6-2}\right)$$

$$113)\int\frac{3}{2+5x^2+3x^4}\cdot dx=3arc(tang=x)-\sqrt{6}\cdot arc(tang=x\sqrt{\tfrac{3}{2}})$$

$$114)\int\frac{1}{3+4x+5x^2}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot arc\left(tg=\frac{5x+2}{\sqrt{11}}\right)$$

115) $$\int \frac{3}{5-7x+2x^2} \cdot dx = log\left(\frac{2x-5}{2x-2}\right)$$

116) $$\int \frac{x^2}{5+2x+x^2} \cdot dx = x - log\,(5+2x+x^2)$$
$$-\tfrac{3}{2}\, arc\left(tang = \frac{x+1}{2}\right)$$

117) $$\int \frac{x^3}{(1+x+x^2)^2} \cdot dx = \frac{2x+1}{3(1+x+x^2)} + \tfrac{1}{2} log\,(1+x+x^2)$$
$$-\frac{5}{3\sqrt{3}}\, arc\left(tang = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

118) $$\int \frac{9x^4}{(10-2x+x^2)^3} \cdot dx = \frac{25}{18}\, arc\left(tang = \frac{x-1}{3}\right)$$
$$-\frac{29x^3+21x^2+90x+400}{6(10-2x+x^2)^2}$$

119) $$\int \frac{12}{x(6+7x+2x^2)} \cdot dx = log\left(\frac{x^2}{6+7x+2x^2}\right) - 7\, log\left(\frac{2x+3}{2x+4}\right)$$

120) $$\int \frac{1}{x^3(1+x+x^2)^2} \cdot dx = \frac{-3+9x+11x^2+16x^3}{6x^2(1+x+x^2)}$$
$$+\tfrac{1}{2}\, log\left(\frac{x^2}{1+x+x^2}\right) + \frac{13}{3\sqrt{3}}\, arc\left(tang = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

121) $$\int \frac{x^3}{(1-x^2+x^4)^2} \cdot dx = \frac{2x^4-x^2}{6(1-x^2+x^4)}$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\, arc\left(tang = \frac{\sqrt{3}}{1-2x^2}\right)$$

122) $$\int \frac{x^2}{9-10x^3+x^6} \cdot dx = \frac{1}{24}\, log\left(\frac{x^3-9}{x^3-1}\right)$$

123) $$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\, dx = log\, \frac{(x+3)^2}{x+2}$$

124) $$\int \frac{3x^2-2x+7}{x^3+3x^2-4}\, dx = \frac{23}{3(x+2)} + \frac{8}{9}\, log\,(x-1)$$
$$+\frac{19}{9}\, log\,(x+2)$$

125) $$\int \frac{x^3-6x^2+3x-9}{x^4+14x^3+73x^2+168x+144}\,dx = \frac{280x+939}{(x+3)(x+4)}$$
$$+264\log(x+3)-263\log(x+4)$$

126) $$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2-11x-12}\,.\,dx = \tfrac{13}{21}\log(x+4)$$
$$+\tfrac{13}{28}\log(x-3)-\tfrac{1}{12}\log(x+1)$$

127) $$\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}\,dx = \tfrac{4}{7}\log(x-2)+\tfrac{17}{14}\log(x^2+3)$$
$$-\frac{1}{7\sqrt{3}}\,arc\left(tang = x\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$

128) $$\int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}\,dx = \frac{1}{x+1}+\tfrac{1}{2}\log\frac{(x^2+2)^2}{x+1}$$
$$+\frac{4\sqrt{2}}{3}\,arc\left(tang = \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

129) $$\int \frac{x^3-114x^2-68x+68}{24x^5-10x^4+35x^3-14x^2-26x+12}\,.\,dx$$
$$= \log\left\{\frac{x^2+2}{(3x-2)^2}\sqrt{\frac{4x+3}{2x-1}}\right\}+\sqrt{2}\,arc\left(tg = \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

130) $$\int \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}\,.\,dx = \frac{x}{x^2+x+1}$$

131) $$\int \frac{3x^4-5x^3}{x^5-5x^4+8x^3-40x^2+16x-80}\,.\,dx = \frac{74-20x}{29(x^2+4)}$$
$$+\tfrac{790}{841}\,arc\left(tang = \frac{x}{2}\right)+\tfrac{1273}{1682}\log(x^2+4)+\tfrac{1250}{841}\log(x-5)$$

132) Wenn $\beta > \alpha^2$ ist, wird,

$$\int \frac{(a+bx).dx}{x^2+2\alpha x+\beta} = \frac{a-b\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\,.\,arc\left(tang = \frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}b\,.\,\log(x^2+2\alpha x+\beta)$$

133) Unter derselben Voraussetzung, dass $\beta > \alpha^2$ ist, wird für jedes $n$, welches grösser als 1 ist:

$$\int \frac{(a+bx).dx}{(x^2+2\alpha x+\beta)^p} = -\frac{b}{2p-2} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-1}} +$$

$$+(a-b\alpha)(x+\alpha).\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(2p-2)(\beta-\alpha^2)} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-1}} \\ + \frac{(2p-3)}{(2p-2)(2p-4)(\beta-\alpha^2)^2} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-2}} \\ + \frac{(2p-3)(2p-5)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)(\beta-\alpha^2)^3} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-3}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.3}{(2p-2)(2p-4)\ldots.2.(\beta-\alpha^2)^{p-1}} \cdot \frac{1}{x^2+2\alpha x+\beta} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.3.1}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)\ldots..2} \cdot \frac{(a-b\alpha)}{(\beta-\alpha^2)^{p-1}\sqrt{\beta-\alpha^2}} \cdot arc\left(tang = \frac{x+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)$$

134) $$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{x^2-x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} arc\left(tang = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

135) $$\int \frac{x.dx}{(x^2+x+1)^3} = -\frac{1}{6}\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot arc\left(tang = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

136) $$\int \frac{(x+2).dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} arc\left(tang = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

137) $$\int \frac{(x+1).dx}{(x^2+x+1)^3.(x^2+1)} = -\frac{1}{6}\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{6}\frac{4x-1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot arc\left(tang = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - arc(tang = x) + \tfrac{1}{2} log (x^2+x+1) + \tfrac{1}{2} log (x^2+1)$$

138) Wenn $\beta$ kleiner ist als $\alpha^2$, so wird

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{x^2+2\alpha x+\beta} = \frac{a-b\alpha}{2\sqrt{\alpha^2-\beta}} log \frac{x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}} + \tfrac{1}{2} b\, log (x^2+2\alpha x+\beta)$$

139) Bei derselben Bedingung $\beta < \alpha^2$ erhält man für jedes $p$, welches grösser als 1 ist, folgende Reductionsformel:

$$\int \frac{(a+bx).dx}{(x^2+2\alpha x+\beta)^p} = -\frac{b}{2p-2} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-1}}$$

$$-(a-b\alpha)(x+\alpha) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2p-2)(\alpha^2-\beta)} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-1}} \\ -\frac{(2p-3)}{(2p-2)(2p-4)(\alpha^2-\beta)^2} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-2}} \\ +\frac{(2p-3)(2p-5)}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)(\alpha^2-\beta)^3} \cdot \frac{1}{(x^2+2\alpha x+\beta)^{p-3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\frac{(-1)^{p-2}(2p-3)(2p-5)\ldots\ldots 3}{(2p-2)(2p-4)\ldots 2.(\alpha^2-\beta)^{p-1}} \cdot \frac{1}{x^2+2\alpha x+\beta} \end{array} \right\}$$

$$+\frac{(-1)^p(2p-3)(2p-5)\ldots\ldots 3}{(2p-2)(2p-4)(2p-6)\ldots\ldots 2} \cdot \frac{a-b\alpha}{2(\alpha^2-\beta)^{p-1}\sqrt{\alpha^2-\beta}} \log\left(\frac{x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}\right)$$

140) $$\int \frac{dx}{x^2+4x+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \log\left(\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right)$$

141) $$\int \frac{x.dx}{x^2+4x+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \log\left(\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{2}\log(x^2+4x+2)$$

142) $$\int \frac{dx}{x^2+5x+4} = \tfrac{1}{9}\log\frac{x+1}{x+4}$$

143) $$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+5x+4)^2} = \frac{\frac{7}{9}x+2}{x^2+5x+4} - \tfrac{7}{27}\log\frac{x+1}{x+4}$$

144) $$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+5x+4)^3} = \tfrac{1}{6}\,\frac{(x+1)}{(x^2+5x+4)^2} - \tfrac{1}{9}\,\frac{(x+\frac{5}{2})}{x^2+5x+4} + \tfrac{1}{27}\log\frac{x+1}{x+4}$$

145) $$\int \frac{x.dx}{(x^2+5x+4)^4} = \tfrac{1}{27}\,\frac{(5x+8}{(x^2+5x+4)^3} - \tfrac{25}{243}\,\frac{x+\frac{5}{2}}{(x^2+5x+4)^2} + \tfrac{50}{729}\,\frac{x+\frac{5}{2}}{x^2+5x+4} - \tfrac{50}{2187}\log\left(\frac{x+1}{x+4}\right)$$

$$146)\int\frac{-(x^6+14x^5+78x^4+221x^3+335x^2+254x+76).dx}{(x^2+5x+4)^4}=$$

$$=\frac{1}{27}\,\frac{(5x+8)}{(x^2+5x+4)^3}-\frac{1}{243}\,\frac{(25x+3)}{(x^2+5x+4)^2}+\frac{1}{729}\,\frac{(536x+\frac{2761}{2})}{x^2+5x+4}$$

$$-\frac{779}{2187}\,log\left(\frac{x+1}{x+4}\right)$$

Die eigentlich hierher gehörigen Integrationen, wofür noch mehr Beispiele zweckmässig sind, ordnen sich besser unter die allgemeinen Reductionsformeln der Integration der irrationalen, sogenannten binomischen Differentiale unter; weshalb sie bis dahin verschoben werden sollen.

## B. Integration algebraischer irrationaler Funktionen.

### §. 15.

Irrationale Funktionen sind im Allgemeinen solche, in welchen die variable Grösse unter einem Wurzelzeichen oder zu einer gebrochenen Potenz erhoben vorkommt. Dergleichen sind allerdings auch schon in den früher angeführten Beispielen vorgekommen, jedoch nur dann, wenn die einfache Einführung einer neuen Variabeln als passende höhere Potenz der ursprünglichen die Funktion zu einer rationalen machte. Reicht dieses jedoch nicht mehr hin, sondern muss man eine mehrnamige oder auch eine gebrochene Funktion der ursprünglich Variabeln als neue Veränderliche in die Rechnung einführen, um wo möglich die Funktion zu einer rationalen zu machen, oder sie auf die möglichst einfache Form zurückzuführen, so nennt man dieses speciell die auf ihre Integration bezügliche Untersuchung der irrationalen Funktionen.

Man ist bei dem gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft, wo noch nicht einmal die elliptischen Funktionen, wie sie es eigentlich verdienen, in gleicher Weise als die trigonometrischen Funktionen durch allgemein bekannte Tafeln der Rechnung zugänglich sind, auf eine äusserst geringe Anzahl von tractabeln irrationalen Funktionen beschränkt.

Kommt zunächst in einem zur Integration vorgegebenen Differential unter einem einzigen Wurzelzeichen nur eine lineäre Funktion der Variabeln vor, so darf man nur diese Funktion einer neuen Variabeln, zur Potenz des Wurzelzeichens erhoben, gleich setzen, um die Funktion zu einer rationalen zu machen. Kommt dieselbe lineäre Funktion der ursprünglich Variabeln zu verschiedenen gebrochenen Potenzen erhoben vor, so setzt man sie einer neuen Variabeln gleich, die zu einer solchen Potenz erhoben ist, dass ihr Exponent der kleinste gemeinsame Dividuus der Nenner aller gebrochenen Exponenten der frühern Funktion wird.

Das zunächst Complicirtere ist es, wenn in der zu integrirenden Funktion als alleinige Irrationalität eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck der zweiten Dimension enthalten ist, so dass sich also die Aufgabe in der Form $\int f(x, \sqrt{A+Bx+Cx^2}) \, . \, dx$ oder $\int f(x,R) \, . \, dx$ darstellt, wenn man für den Augenblick $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$ durch $R$ bezeichnet. Dieses lässt sich aber bekanntlich stets auf diese beiden Integrale zurückführen:

$$\int \frac{x^n}{R} \, . \, dx \text{ und } \int \frac{1}{x^n . R} \, . \, dx$$

und diese reduciren sich wieder, bezüglich auf den Exponenten $n$, vermittelst dieser beiden Relationen:

$$\int \frac{x^n}{R} . dx = \frac{x^{n-1} . R}{nC} - \frac{(n-1) A}{nC} \int \frac{x^{n-2}}{R} . dx - \frac{(n-\frac{1}{2}) B}{nC} \int \frac{x^{n-1}}{R} . dx$$

$$\int \frac{1}{x^n . R} . dx$$

$$= - \frac{R}{(n-1) A . x^{n-1}} - \frac{(n-\frac{3}{2}) B}{(n-1) A} \int \frac{1}{x^{n-1} . R} . dx - \frac{(n-2) C}{(n-1) A} \int \frac{1}{x^{n-2} . R} . dx$$

sämmtlich auf das einzige Integral

$$\int \frac{dx}{R} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}.$$

Bei diesem Integral sind zwei wesentliche Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Coefficient des Quadrats der Variabeln unterm Wur-

zelzeichen positiv oder negativ ist. Wenn nun $C$ eine an und für sich positive Zahl ist, so wird nach bekannter Substitution:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{2}{\sqrt{C}}.log\left\{B+2Cx+2\sqrt{C}.\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right\}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}=\frac{2}{\sqrt{C}}.arc\left(cotg=\sqrt{\frac{\sqrt{B^2+4AC}+(B-2Cx)}{\sqrt{B^2+4AC}-(B-2Cx)}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C}}.arc\left(cos=\frac{B-2Cx}{\sqrt{B^2+4AC}}\right)$$

Von den übrigen irrationalen Differentialen sind hauptsächlich die binomischen untersucht, welche sich durch einfache Substitutionen immer auf die Form bringen lassen:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.dx$$

worin $m$ und $n$ sogar als ganze Zahlen angenommen werden dürfen. Man kann das Differential unterm Integralzeichen unter zwei Bedingungen rational machen, wenn entweder $\frac{m}{n}$ oder auch wenn $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. Wenn keines von beiden stattfindet, so muss man sich begnügen, durch hernach anzugebende Reductionsformeln das Integral auf die möglichst einfache Gestalt zurückzuführen.

Geht man in den Irrationalitäten weiter zu Trinomen, die zu Potenzen mit gebrochenen Exponenten erhoben sind, so stösst man gleich auf bedeutende Schwierigkeiten, so dass man bei der Untersuchung sogleich den geregelten Weg verliert. Auch selbst wenn man zum gebrochenen Potenzexponenten die einfachste Zahl, nämlich $\frac{1}{2}$ wählt, so kommt man, wenn aus einem Ausdruck der zweiten Dimension die Quadratwurzel gezogen wird, wie vorhin bemerkt wurde, auf logarithmische und trigonometrische Funktionen; und wenn man, in diesem Sinne weiter ordnend, einen Ausdruck der vierten Dimension unter dem Wurzelzeichen annimmt, auf die elliptischen Funktionen. Dieses ist aber dann auch die äusserste Grenze, bis zu welcher man bis jetzt die Untersuchung mit Erfolg angestellt hat.

## §. 16.

### Beispiele.

1) $$\int \frac{x^2 . dx}{\sqrt{4+2x}} = \tfrac{1}{15}(32 - 8x + 3x^2)\sqrt{4+2x}$$

2) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{5-2x}} = \frac{3}{50\sqrt{5}} \log \left\{\frac{\sqrt{5-2x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{5}}\right\} - \frac{1}{100x^2} . \left\{10 + 6x\right\}\sqrt{5-2x}$$

3) $$\int \frac{dx}{(x^3+x^4)\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\left\{\frac{15}{4} + \frac{5}{4x} - \frac{1}{2x^2}\right\} + \frac{15}{8} \log\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$$

4) $$\int \frac{32 . dx}{x^5(1-x)^{7/2}}$$

$$= \frac{\left\{-\frac{1}{4x^4} - \frac{13}{24x^3} - \frac{143}{96x^2} - \frac{429}{64x} + \frac{23023}{310} - \frac{7007 . x}{64} + \frac{3003 . x^2}{64}\right\}}{(1-x)^{5/2}} + \tfrac{3003}{128} . \log\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right)$$

5) $$\int \frac{x . dx}{(5x+3)^{5/2}} = -\frac{2(5x+2)}{25(5x+3)^{3/2}}$$

6) $$\int 7x^2\sqrt{5+2x} . dx = (\tfrac{10}{3} - 2x + x^2) . (5+2x)^{3/2}$$

7) $$\int \frac{1}{x^3}\sqrt{3x-7} . dx = \frac{(3x-7)^{3/2}}{14x^2} - \frac{3}{28x}\sqrt{3x-7} + \frac{9}{28\sqrt{7}} \, arc\left(tang = \sqrt{\tfrac{3}{7}x - 1}\right)$$

8) $$\int \frac{x^2 . dx}{3\sqrt[3]{x+2}} = \left\{\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{3}{10}x + \tfrac{9}{10}\right\} . \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

9) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \left\{ \frac{1}{4x^4} + \frac{11}{36x^3} + \frac{11}{27x^2} + \frac{55}{81x} \right\} \sqrt[3]{x-1}$

$+ \frac{55}{81} \log \frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{110}{243} \sqrt{3}\,.\,arc\left(tang = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-2}\right)$

10) $\int x \sqrt[3]{3x+7}\,.\,dx = (\frac{1}{7}x - \frac{1}{4})(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}$

11) $\int \frac{\sqrt[3]{(8+2x)^2}}{3x}\,.\,dx = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(8+2x)^2} + 2 \log \sqrt[3]{\frac{8}{x}+2}$

$+ \frac{4}{\sqrt{3}}\,.\,arc\left(tang = \frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{8+2x}}{4+\sqrt[3]{8+2x}}\right)$

12) $\int \frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\,.\,(1+x^2)(2\sqrt{x}-x)^2 = \frac{6}{7}\,.\,x^3\sqrt{x} - \frac{3}{4}x^4$

$+ \frac{1}{6}\,.\,x^4\sqrt{x} + \frac{6}{11}\,.\,x^5\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,.\,x^6 + \frac{3}{26}\,.\,x^6\sqrt{x}$

13) $\int (\sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x^3})^2\,.\,(4\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2})\,.\,dx = \frac{8}{11}\,.\,x^{\frac{11}{2}} - \frac{120}{23}\,.\,x^{\frac{23}{5}}$

$+ \frac{360}{37}\,.\,x^{\frac{37}{10}} - \frac{1}{14}\,.\,x^{\frac{14}{3}} + \frac{60}{113}\,.\,x^{\frac{113}{30}} - \frac{45}{43}\,.\,x^{\frac{43}{15}}$

14) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^3\,.\,(3+\sqrt[5]{x^2})}{7\sqrt{x^3}}\,.\,dx = -\frac{3}{7}\,.\,x\sqrt[3]{x^2} - \frac{90}{49}\,.\,x\sqrt[6]{x}$

$+ \frac{45}{14}\,.\,\sqrt[3]{x^2} + \frac{30}{7}\,.\,\sqrt[6]{x} - \frac{3}{7}\,.\,x + \frac{18}{7}\,.\,\sqrt{x} - \frac{6}{7}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{9}{7}\,.\,\log x$

15) $\int \left[ f\left\{ x^{mn}, \left(\frac{a+bx^u}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{r}{s}}, \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{t}{u}}, \ldots \right\} \right] . x^{n-1}.dx.$

Dieses Integral wird das einer rationalen Funktion, wenn man $\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n} = z^{q.s.u\ldots}$ oder auch gleich einer solchen Potenz von $x$ setzt, deren Exponent der kleinste gemeinsame Dividuus aller Nenner der gebrochenen Exponenten von $\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}$ ist.

16) $\int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$. Wenn man hierin $1+x = z^6$ setzt, wird der Ausdruck rational. Die weitläufige Ausrechnung hat hier keinen Zweck.

17) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{(1+x)}\sqrt[6]{(1-x)^5}}\cdot dx.$ Um das hier vorliegende Differential rational zu machen, setze man: $\dfrac{1+x}{1-x}=z^6.$ Die weitere Auswerthung hat hier eben so wenig, als vorhin, einen wesentlichen Zweck.

18) $\displaystyle\int \frac{x^3\sqrt[4]{1-x^4}\cdot\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left\{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\right\}}\cdot dx.$ Wenn man hierin $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=z^4$ setzt, wird die Grösse unterm Integralzeichen rational.

19) $\displaystyle\int \frac{x^5\sqrt{1+x^3}\,\sqrt[4]{1-x^6}}{\sqrt[4]{1-x^3}\left\{\sqrt[4]{1+x^3}+\sqrt[4]{1-x^3}\right\}}\cdot dx.$ Man setzt

$$\frac{1+x^3}{1-x^3}=z^4$$

20) $\displaystyle\int (ax+b)^m\cdot(a'x+b')^n\cdot dx.$ Dieses Integral wird rational, wenn $m$ oder $n$ oder $m+n$ eine ganze Zahl ist. Unter allen Umständen aber kann man folgende Reductionsformeln anwenden:

$$\alpha)\ \int (ax+b)^m\cdot(a'x+b')^n\cdot dx=\frac{(ax+b)^m\cdot(a'x+b')^{n+1}}{(m+n+1)\,a'}-\frac{m(ab'-a'b)}{(m+n+1)\,a'}\cdot\int (ax+b)^{m-1}\cdot(a'x+b')^n\cdot dx$$

$$\beta)\ \int (ax+b)^{-m}\cdot(a'x+b')^n\cdot dx=-\frac{(ax+b)^{-m+1}\cdot(a'x+b')^{n+1}}{(m-1)(ab'-a'b)}-\frac{(m-n-2)\,a'}{(m-1)(ab'-a'b)}\cdot\int (ax+b)^{-m+1}\cdot(a'x+b')^n\cdot dx$$

$$\gamma)\ \int (ax+b)^m\cdot(a'x+b')^n\cdot dx=\frac{(ax+b)^{m+1}\cdot(a'x+b')^n}{(m+n+1)\,a}-\frac{n(a'b-ab')}{(m+n+1)\,a}\cdot\int (ax+b)^m\cdot(a'x+b')^n\cdot dx$$

δ) $$\int (ax+b)^m.(a'x+b')^{-n}.dx = -\frac{(ax+b)^{m+1}.(a'x+b')^{-n+1}}{(n-1)(a'b-ab')}$$

$$-\frac{(n-m-2)a}{(n-1)(a'b-ab')}.\int (ax+b)^m.(a'x+b')^{-n+1}.dx$$

21) $$\int \frac{1}{(ax+b)(a'x+b')}.dx = \frac{1}{2(ab'-a'b)}.\log\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)$$

22) $$\int x^{m-1}.(a+bx^n)^p.dx = \frac{x^{m-n}.(a+bx^n)^{p+1}}{(m+pn).b}$$

$$-\frac{(m-n).a}{(m+pn).b}.\int x^{m-n-1}.(a+bx^n)^p dx$$

23) $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p.dx = (a+bx^n)^{p+1}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^{m-n}}{(m+pn).b} \\ -\frac{(m-n).a.x^{m-2n}}{\{m+pn\}.\{m+(n-1)p\}.b^2} \\ +\frac{(m-n)(m-2n).a^2.x^{m-3n}}{\{m+pn\}.\{m+(n-1)p\}\{m+(n-2)p\}.b^3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^h.\frac{(m-n)(m-2n)\ldots(m-[h-1]n).a^{h-1}.x^{m-hn}}{\{m+pn\}.\{m+(n-1)p\}\ldots\{m+(n-h+1)p\}.b^h} \end{array}\right]$$

$$+(-1)^h\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-hn).a^h.}{(m+pn)\ldots(m+[n-h+1]p);b^h}.\int x^{m-hn-1}.(a+bx^n)^p.dx$$

Hier bedeutet $h$ die grösste ganze Zahl, die in $\frac{m-1}{n}$ enthalten ist.

24) $$\int x^{-m-1}.(a+bx^n)^p.dx = -\frac{x^{-m}.(a+bx^n)^{p+1}}{ma}$$

$$-\frac{(m-[p+1]n)b}{ma}.\int x^{-m+n-1}.(a+bx^n)^p.dx$$

25) $$\int x^{-m-1}.(a+bx^n)^p.dx = (a+bx^n)^{p+1}$$

$$\left[-\frac{x^{-m}}{ma} + \frac{(m-[p+1]n)b}{m(m-n).a^2}.x^{-m+n} - \frac{(m-[p+1]n)(m-[p+2]n).b^2}{m(m-n)(m-2n).a^2}.x^{-m+2n} \dots\dots + (-1)^h\frac{(m-[p+1]n)\dots(m-[p+h-1]n).b^{h-1}}{m(m-n)(m-2n)\dots(m-[h-1]n).a^h}.x^{-m+(h-1)n}\right]$$

$$+(-1)^h.\frac{(m-[p+1]n)\dots(m-[p+h]n).b^h}{m(m-n)(m-2n)\dots(m-[h-1]n).a^h}.\int x^{-m+hn-1}.(a+bx^n)^p.dx$$

Hier bedeutet $h$ die kleinste ganze Zahl, welche grösser als $\frac{m+1}{n}$ ist.

26) $$\int x^{m-1}.(a+bx^n)^p.dx = \frac{x^m.(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{pn.a}{m+pn}\int x^{m-1}.(a+bx^n)^{p-1}.dx$$

27) $$\int x^{m-1}.(a+bx^n)^p.dx =$$

$$x^m.\left[\frac{(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{pn.a.(a+bx^n)^{p-1}}{(m+pn).(m+[p-1]n)} + \frac{p(p-1)n^2.a^2.(a+bx^n)^{p-2}}{(m+pn).(m+[p-1]n).(m+[p-2]n)} \dots\dots + \frac{p.(p-1)\dots(p-[h-1]).n^h.a^h.(a+bx^n)^{p-h}}{(m+pn).(m+[p-1]n)\dots(m+[p-h]n)}\right]$$

$$+\frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-h).n^{h+1}.a^{h+1}}{(m+pn)\ldots\ldots(m+[p-h]n)}.\int x^{m-1}.(a+bx^n)^{p-(h+1)}.dx$$

Hier bedeutet $h$ die grösste ganze Zahl, welche in $p$ enthalten ist.

28) $$\int x^{m-1}.(a+bx^n)^{-p}.dx=\frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)}$$

$$-\frac{m-np+n}{an(p-1)}.\int x^{m-1}.(a+bx^n)^{-p+1}.dx$$

29) $$\int x^{m-1}.(a+bx^n)^{-p}.dx=$$

$$x^m.\left[\begin{array}{l}\dfrac{(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)}\\[2ex] -\dfrac{(m-np+n).(a+bx^n)^{-p+2}}{a^2.n^2.(p-1)(p-2)}\\[2ex] +\dfrac{(m-np+n)(m-np+2n).(a+bx^n)^{-p+3}}{a^3n^3.(p-1)(p-2)(p-3)}\\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\[2ex] +(-1)^{h-1}\dfrac{(m-np+n)\ldots\ldots(m-np+[h-1]n).(a+bx^n)^{-p+h}}{a^h.n^h.(p-1)(p-2)\ldots.(p-h)}\end{array}\right]$$

$$+(-1)^h\frac{(m-np+n)\ldots.(m-np+hn)}{a^h.n^h.(p-1)(p-2)\ldots.(p-h)}.\int x^{m-1}.(a+bx^n)^{-p+h}.dx$$

Hier bedeutet $h$ wieder die grösste ganze Zahl, welche in $p$ enthalten ist.

30) Wenn $s$ eine positive ganze, aber ungerade Zahl ist, wird:

$$\int x^{2r}.\sqrt{(1-x^2)^s}.dx=$$

$$
-\frac{\sqrt{(1-x^2)^{s+2}}}{2r+s+1}\cdot\left[\begin{array}{l}
x^{2r-1} \\
+\frac{2r-1}{2r+s-1}\cdot x^{2r-3} \\
+\frac{(2r-1)(2r-3)}{(2r+s-1)(2r+s-3)}\cdot x^{2r-5} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+\frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots.3}{(2r+s-1)(2r+s-3)\ldots.(s+3)}\cdot x
\end{array}\right]
$$

$$
+\frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots..1}{(2r+s+1)(2r+s-1)\ldots..(s+3)(s+1)}\cdot x\sqrt{(1-x^2)}
$$

$$
\cdot\left[\begin{array}{l}
(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}} \\
+\frac{s}{s-1}\cdot(1-x^2)^{\frac{s-3}{2}} \\
+\frac{s(s-2)}{(s-1)(s-3)}\cdot(1-x^2)^{\frac{s-5}{2}} \\
+\frac{s(s-2)(s-4)}{(s-1)(s+3)(s-5)}\cdot(1-x^2)^{\frac{s-7}{2}} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+\frac{s(s-2)(s-4)\ldots3}{(s-1)(s-3)\ldots..2}
\end{array}\right]
$$

$$
+\frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots.3.1\,(1.3.5)\ldots(s-2).s}{(2r+s+1)(2r+s-1)\ldots(s+3)(s+1)(s-1)\ldots.2}\cdot arc\,(sin=x)
$$

11) Wenn wieder $s$ eine positive ganze, aber ungerade Zahl ist, dann wird:

$$
\int x^{2r+1}\,.\sqrt{(1-x^2)^s}\,.\,dx =
$$

$$-\frac{\sqrt{(1-x^2)^{s+2}}}{2r+s+2}\cdot\left[\begin{array}{l} x^{2r} \\ +\frac{2r}{2r+s}\cdot x^{2r-2} \\ +\frac{2r.(2r-2)}{(2r+s)(2r+s-2)}\cdot x^{2r-4} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots.4}{(2r+s)(2r+s-2)\ldots.(s+4)}\cdot x^2. \end{array}\right]$$

$$+\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots.4.2}{(2r+s)(2r+s-2)\ldots..(s+4)(s+2)}\cdot x^2.\sqrt{1-x^2}$$

$$\cdot\left[(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{s-3}{2}}+(1-x^2)^{\frac{s-5}{2}}\ldots+(1-x^2)+1\right]$$

$$-\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots..4.2}{(2r+s+2)(2r+s)(2r+s-2)\ldots(s+4)(s+2)}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

32) Wenn wieder $s$ eine positive ganze, aber ungerade Zahl ist, dann wird

$$\int\frac{x^{2r}.dx}{\sqrt{(1-x^2)^s}}=-\frac{1}{(2r-s+1)\,.\sqrt{(1-x^2)^{s-2}}}.$$

$$\cdot\left[\begin{array}{l} x^{2r-1} \\ +\frac{2r-1}{2r-s-1}\cdot x^{2r-3} \\ +\frac{(2r-1)(2r-3)}{(2r-s-1)(2r-s-3)}\cdot x^{2r-5} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots.3}{(2r-s-1)(2r-s-3)\ldots.(-s+3)}\cdot x \end{array}\right]$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots.3.1.}{(2r-s+1)(2r-s+3)\ldots.(-s+3)}\cdot\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^s}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s-2}\cdot(1-x^2) \\ +\frac{s-3}{(s-2)(s-4)}\cdot(1-x^2)^2 \\ +\frac{(s-3)(s-5)}{(s-2)(s-4)(s-6)}\cdot(1-x^2)^3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\frac{(s-3)(s-5)\ldots\ldots 2}{(s-2)(s-4)\ldots.1}\cdot(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}} \end{array}\right]$$

33) $$\int\frac{x^{2r+1}.dx}{\sqrt{(1+x^2)^s}}=-\frac{1}{(2r-s+2)\sqrt{(1-x^2)^{s-2}}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^{2r} \\ +\frac{2r}{2r-s}\cdot x^{2r-2} \\ +\frac{2r(2r-2)}{(2r-s)(2r-s-2)}\cdot x^{2r-4} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots.4}{(2r-s)(2r-s-2)\ldots.(s+4)}\cdot x^2 \end{array}\right]$$

$$+\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots4.2}{(2r-s+2)(2r-s)(2r-s-2)\ldots.(s+4).(s-2)}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^s}}$$

$$\cdot\left[(1-x^2)+(1-x^2)^2+\ldots+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]$$

$$-\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots4.2}{(2r-s+2)(2r-s)(2r-s-2)\ldots.(s+4).(s-2)}\cdot\sqrt{1-x^2)}$$

**34)** Wenn $r$ und $s$ positive ganze Zahlen sind, so ist

$$\int\frac{dx}{x^{2r}\sqrt{(1-x^2)^s}}=-\frac{1}{(2r-1)x^{2r-1}\sqrt{(1-x^2)^{s-2}}}.$$

$$\cdot\left[\begin{array}{l} 1 \\ +\dfrac{2r+s-3}{2r-3}\cdot x^2 \\ +\dfrac{(2r+s-3)(2r+s-5)}{(2r-3)(2r-5)}\cdot x^4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\dfrac{(2r+s-3)(2r+s-5)\,..(s+1)}{(2r-3)(2r-5)\ldots 3.1}\cdot x^{2(r-1)} \end{array}\right]$$

$$+\frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(s+1)}{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots\ldots 3.1}\cdot\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^s}}$$

$$\cdot\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{s-2}\cdot(1-x^2) \\ +\dfrac{s-3}{(s-2)(s-4)}\cdot(1-x^2)^2 \\ +\dfrac{(s-3)(s-5)}{(s-2)(s-4)(s-6)}\cdot(1-x^2)^3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\dfrac{(s-3)(s-5)\ldots 2}{(s-2)(s-4)\ldots 1}\cdot(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}} \end{array}\right]$$

35) $$\int\frac{dx}{x^{2r+1}\sqrt{(1-x^2)^s}}=-\frac{1}{2r\,x^{2r}\sqrt{(1-x^2)^{s-2}}}.$$

$$\cdot\left[\begin{array}{l}1\\+\frac{2r+s-2}{2r-2}\cdot x^2\\+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)}{(2r-2)(2r-4)}x^4\\\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)}{(2r-2)(2r-4)\ldots2}x^{2(r-1)}\end{array}\right]$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots.(s+2).s}{2r(2r-2)(2r-4)\ldots..2.}\frac{1}{\sqrt{1-x^2)^s}}.$$

$$\cdot\left[\frac{1-x^2}{s-2}+\frac{(1-x^2)^2}{s-4}+\frac{(1-x^2)^3}{s-6}+,\ldots+\frac{(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}}{1}\right]$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots.(s+2).s}{(2r-2)(2r-4)\ldots..2}\cdot log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)$$

36) $$\int\frac{x^{2r}.dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r}\cdot\Big\{x^{2r-1}+\frac{2r-1}{2r-2}x^{2r-3}$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)}{(2r-2)(2r-4)}\cdot x^{2r-5}+\ldots$$

$$\ldots..+\frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots.5.3}{(2r-2)(2r-4)(2r-6)\ldots4.2}x\Big\}$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots3.1}{2r(2r-2)(2r-4)\ldots4.2}\,arc\,(sin=x)$$

37) $$\int\frac{x^{2r+1}.dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2z+1}\cdot\Big\{x^{2r}+\frac{2r}{2r-1}\cdot x^{2r-2}$$

$$+\frac{2r.(2r-2)}{(2r-1)(2r-3)}x^{2r-4}+\ldots..$$

$$\ldots.+\frac{2r(2r-2)(2r-4)\ldots.4.2}{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots3.1}\Big\}$$

$$38)\quad \int \frac{dx}{x^{2r}.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2r-1).x^{2r-1}}.\Big\{1+\frac{2r-2}{2r-3}.x^2 + \frac{(2r-2)(2r-4)}{(2r-3)(2r-5)}.x^4+\ldots\ldots + \frac{(2r-2)(2r-4)\ldots\ldots2}{(2r-3)(2r-5)\ldots.1}.x^{2r}\Big\}$$

$$39)\quad \int \frac{dx}{x^{2r+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r.x^{2r}}.\Big\{1+\frac{2r-1}{2r-2}.x^2 + \frac{(2r-1)(2r-3)}{(2r-2)(2r-4)}.x^4+\ldots\ldots + \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots.3}{(2r-2)(2r-4)\ldots2}.x^{2r-2}\Big\} + \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots1}{2r(2r-2)(2r-4)\ldots2}.log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)$$

$$40)\quad \int (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}.dx = \frac{(b+cx)(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)c} - \frac{n(b^2-ac)}{(n+1)c}\int (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}.dx$$

$$41)\quad \int (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}.dx = \frac{b+cx}{(n+1)c}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^n}.$$

$$.\left[\begin{array}{l} 1 \\ -\dfrac{n}{n-1}.\dfrac{b^2-ac}{c(a+2bx+cx^2)} \\ +\dfrac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}.\dfrac{(b^2-ac)^2}{c^2(a+2bx+cx^2)^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-)^h.\dfrac{n(n-2)\ldots.(n-2h+2)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-2h+1)}.\dfrac{(b^2-ac)^h}{c^h(a+2bx+cx^2)^h} \end{array}\right]$$

$$-1)^{h+1} \frac{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots(n-2h)}{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2h+1)} \cdot \frac{1}{c^{h+1}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

Hier ist $n$ natürlich als ungerade ganze Zahl angenommen und )edeutet die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Das am Ende anleutete Integral hat, je nachdem $c$ positiv oder negativ ist, den ei- ı oder den andern von den S. 216 genannten Werthen.

$$) \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{(b+cx)(a+2bx+cx^2)^{-\frac{n}{2}+1}}{(n-2)(b^2-ac)}$$

$$-\frac{(n-3)c}{(n-2)(b^2-ac)} \cdot \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$) \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{b+cx}{(n-2)(b^2-ac)\sqrt{(a+2bx+cx^2)^n}} \cdot$$

$$\cdot \left[ \begin{array}{l} (a+2bx+cx^2) \\ -\dfrac{(n-3).c.(a+2bx+cx^2)^2}{(n-4).(b^2-ac)} \\ +\dfrac{(n-3)(n-5).c^2.(a+2bx+cx^2)^3}{(n-4)(n-6).(b^2-ac)^2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +(-1)^{h-1}.\dfrac{(n-3)(n-5)\ldots(n-2h+1).c^{h-1}(a+2bx+cx^2)}{(n-4)(n-6)\ldots(n-2h).(b^2-ac^2)^{h-1}} \end{array} \right]$$

Hier bedeutet $h$ wieder die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

$$) \int x(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}.dx = \frac{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+2)c}$$

$$-\frac{b}{c} \int (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}.dx$$

Das letztere Integral ist aus Aufgabe 41) bekannt.

45) $$\int x^2 (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} . dx$$

$$= \frac{1}{(n+3)c} . \left\{ x - \frac{n+4}{n+2} . \frac{b}{c} \right\} . \left\{ a+2bx+cx^2 \right\}^{\frac{n}{2}+1}$$

$$+ \frac{(n+4)b^2 - ac}{(n+3)c} \int (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} . dx$$

46) $$\int x^3 (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} . dx$$

$$= \frac{1}{(n+4)c} . \left\{ a+2bx+cx^2 \right\}^{\frac{n}{2}+1} .$$

$$. \left[ x^2 - \frac{(n+6).bx}{(n+3)c} + \frac{(n+4)(n+6)b^2}{(n+2)(n+3)c^2} - \frac{2a}{(n+2)c} \right]$$

$$- \left\{ \frac{4b^3}{(n+3)c^3} - \frac{3ab}{(n+3)c^2} \right\} . \int (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} . dx$$

47) $$\int \frac{x.dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = - \frac{1}{(n-2)\, c . (a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$- \frac{b}{c} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

In Bezug auf das letzte Integral ist Aufg. 43) nachzusehn.

48) $$\int \frac{x^2 . dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= - \frac{1}{(n-3)c.(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}} . \left\{ x - \frac{(n-4)b}{(n-2)c} \right\}$$

$$+ \frac{b^2}{c^2} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

9) $$\int \frac{x^3 . dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = - \frac{1}{(n-4)c.(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}} .$$

$$\cdot \left[ \begin{array}{l} x^2 \\ -\frac{(n-6)bx}{(n-3)c^2} \\ +\frac{2a}{(n-2)c} + \frac{(n-6)b^2}{(n-2)c^2} \end{array} \right]$$

$$- \left\{ \frac{3ab}{(n-3)c^2} - \frac{4b^3}{(n-3)c^3} \right\} . \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

0) $$\int \frac{x^m . dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = - \frac{x^{m-1}}{(n-m-1)c(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$- \frac{(n-2m)b}{(n-m-1)c} . \int \frac{x^{m-1} . dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$+ \frac{(m-1)a}{(n-m-1)c} . \int \frac{x^{m-1} . dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

1) $$\int \frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(n-2)a(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$+ \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

2) Wenn man der Kürze wegen $a+2bx+cx^2$ durch X bezeichnet, wird

$$\int \frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{X^{\frac{n}{2}}} . \left\{ \frac{X}{(n-2)a} + \frac{X^2}{(n-4)a^2} + \frac{X^3}{(n-6)a^3} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{X^{\frac{n-1}{2}}}{a^{\frac{n-1}{2}}} \right\}$$

$$-\frac{b}{a}.\left\{\int\frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-1}}+\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-2}}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a^{\frac{n-3}{2}}}\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$+\frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}.$$

Wegen der in der vorletzten Zeile stehenden Integrale sehe man Aufg. 43 und das letzte Integral wird, wenn $a$ positiv ist:

$$53)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.\log\left(\frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\right)$$

und wenn $a$ negativ ist;

$$54)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{-a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}arc\left(tg=\frac{bx-a}{\sqrt{a}.\sqrt{-a+2bx+cx^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}arc\left(\sin=\frac{bx-a}{x\sqrt{b^2+ac}}\right)$$

$$55)\quad \int\frac{dx}{x^2(ax2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{ax(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$-\frac{nb}{a}\int\frac{dx}{x(ax2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}-\frac{(n-1)c}{a}\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$56)\quad \int\frac{dx}{x^3(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{2ax^2(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$-\frac{(n+2)b}{2a}\int\frac{dx}{x^2(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}-\frac{nc}{2a}\int\frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$57)\quad \int\frac{dx}{x^m(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$-\frac{(m+2m-4)b}{(m-1)a}.\int\frac{dx}{x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$-\frac{(n+m-3)\,c}{(m-1)\,a}\cdot\int\frac{dx}{x^{m-2}(a+2bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=log\,(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=\frac{\frac{2}{3}(1+2x)}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^5}}=\tfrac{2}{27}\cdot\frac{(1+2x)(11+x+x^2)}{(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$=\tfrac{2}{27}\left(\frac{3}{1+x+x^2}+8\right)\frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$\int\frac{x\,.\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\sqrt{1+x+x^2}-\tfrac{1}{2}\,log\,(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

$$\int\frac{x^2\,.\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\left(\frac{x}{2}-\tfrac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$-\tfrac{1}{8}\,log\,(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

$$\int\frac{x^3\,.\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{5x}{12}-\tfrac{1}{24}\right)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$+\tfrac{7}{16}\,log)\,(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

$$\int\frac{x^4\,.\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\left(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{24}-\frac{x}{96}+\frac{115}{192}\right)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$-\tfrac{37}{128}\,log\,(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

$$\int\frac{x\,.\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{2+x}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$\int\frac{x^2\,.\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=-\tfrac{2}{3}\;\frac{x-1}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$+\,log\,(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

67) $$\int \frac{x^3 . dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = \frac{1}{3} . \frac{3x^2+7x+5}{\sqrt{1+x+x^2}}$$
$$-\frac{3}{2} \log (1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

68) $$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = \frac{1}{12} . \frac{6x^3-15x^2-23x-37}{\sqrt{1+x+x^2}}$$
$$+\frac{3}{8} \log (1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

69) $$\int \frac{x . dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = -\frac{2}{27} . \left\{ \frac{3(2+x)}{1+x+x^2} + 4(1+2x) \right\} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

70) $$\int \frac{x^2 . dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = \frac{2}{27} . \left\{ \frac{2(1-x)}{1+x+x^2} + 5(1+2x) \right\} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

71) $$\int \frac{x^3 . dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = \frac{1}{18} . \frac{(8x+13)}{(1+x+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{27} . \frac{(22x+39)}{(1+x+x^2)^{1/2}}$$

72) $$\int \frac{x^4 . dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = -\frac{1}{9} \frac{(x+4)}{(1+x+x^2)^{3/2}} - \frac{2}{27} \frac{(8x+23)}{(1+x+x^2)^{1/2}}$$
$$+ \log (1+2x+2\sqrt{1+x+x^2})$$

73) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \log \left( \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x} \right)$$

74) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x+x^2}} = -\frac{1}{x}\sqrt{1+x+x^2}$$
$$-\frac{1}{2} \log \left( \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x} \right)$$

75) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x+x^2}} = \left( -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x} \right) \sqrt{1+x+x^2}$$
$$-\frac{1}{8} \log \left( \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x} \right)$$

76) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x+x^2}} = \left( -\frac{1}{3x^3} + \frac{5}{12x^2} + \frac{1}{24x} \right) \sqrt{1+x+x^2}$$
$$+\frac{7}{16} \log \left( \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x} \right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(1-x)}{\sqrt{1+x+x^2}} + \log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = -\tfrac{1}{6}\,\frac{\left(10x+14+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{1+x+x^2}} - \tfrac{3}{2}\log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = \tfrac{1}{12}\,\frac{\left(37x+23+\frac{15}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\sqrt{1+x+x^2}} + \tfrac{3}{8}\log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = -\tfrac{1}{24}\,\frac{\left(33x-21+\frac{3}{x}-\frac{14}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)}{\sqrt{1+x+x^2}} + \tfrac{25}{16}\log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = \tfrac{2}{27}\,\frac{(8-15x-12x^2-17x^3)}{(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}} + \log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$= \tfrac{2}{9}\,\frac{1-x}{(1+x+x^2)^{3/2}} + \tfrac{2}{27}\,\frac{5-17x}{(1+x+x^2)^{1/2}} + \log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = \tfrac{1}{9}\,\frac{\left(\frac{9}{x}-13-11x\right)}{(1+x+x^2)^{3/2}} - \tfrac{1}{27}\,\frac{(89+33x)}{(1+x+x^2)^{1/2}} - \tfrac{5}{2}\log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = \frac{-\frac{1}{2x^2}+\frac{7}{4x}+\frac{71}{36}+\frac{23}{12}x}{(1+x+x^2)^{3/2}} + \tfrac{1}{108}\cdot\frac{523-417x}{(1+x+x^2)^{1/2}} + \tfrac{15}{8}\log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

84) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(1+x+x^2)^5}} = -\frac{\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{4x^2} + \frac{5}{8x} + \frac{5}{72} + \frac{115}{72}x}{(1+x+x^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{5}{216} \cdot \frac{29 + 247x}{(1+x+x^2)^{1/2}} + \frac{35}{16} \log\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right)$$

85) $$\int x^m (ax + bx^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dx = \frac{x^{m-1}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{b(m+n+1)}$$

$$-\frac{a\left(m+\frac{n}{2}\right)}{b(m+n+1)} \int x^{m-1}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dx$$

86) $$\int x^{-m}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dx = -\frac{x^{-m}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a\left(m-\frac{n}{2}-1\right)}$$

$$+\frac{b(2-m+n)}{a\left(m-\frac{n}{2}-1\right)} \int x^{-m+1}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dx$$

87) $$\int x^m (ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} = \frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{m+n+1} \cdot \left\{ \frac{x^{m-1}}{b} \right.$$

$$-\frac{a\left(m+\frac{n}{2}\right)x^{m-2}}{b^2 \cdot (m+n)} + \frac{a^2 \cdot \left(m+\frac{n}{2}\right)\left(m+\frac{n}{2}-1\right)x^{m-3}}{b^3 \cdot (m+n)(m+n-1)} - \dots$$

$$\left. \dots + (-1)^{h-1} \cdot \frac{a^{h-1} \cdot \left(m+\frac{n}{2}\right)\left(m+\frac{n}{2}-1\right)\dots\left(m+\frac{n}{2}-[h-1]\right)}{b^h \cdot (m+n)(m+n-1)\dots(m+n-[h-2])} \right\}$$

$$+(-1)^h \cdot \frac{a^h \cdot \left(m+\frac{n}{2}\right)\dots\left(m+\frac{n}{2}-[h-1]\right)}{b^h \cdot (m+n+1)\dots(m+n-[h-2])} \cdot \int x^{m-h} \cdot (ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dx$$

Wenn $m$ eine positive ganze Zahl ist, reducirt sich das Integral auf $\int (ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dx$

88) $\int x^{-m}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}.dx$

$$= +\frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{\left(\frac{n}{2}+1-m\right)a}\Big\{x^{-m} - \frac{(n+2-m)\,b\,x^{-m+1}}{\left(\frac{n}{2}+2-m\right)a}$$

$$+\frac{(n+2-m)\,(n+3-m)\,b^2 x^{-m+2}}{\left(\frac{n}{2}+2-m\right)\left(\frac{n}{3}+3-m\right)a^2}+\ldots.$$

$$\ldots+(-1)^{h-1}\frac{(n+2-m)\,(n+3-m)\ldots\ldots(n+h-m)\,b^{h-1}x^{-m+h-1}}{\left(\frac{n}{2}+2-m\right)\left(\frac{n}{2}+3-m\right)\ldots.\left(\frac{n}{2}+h-m\right)a^{h-1}}\Big\}$$

$$+(-1)^h.\frac{(n+2-m)\ldots..(n+h+1-m).\,b^h}{\left(\frac{n}{2}+1-m\right)\ldots..\left(\frac{n}{2}+h-m\right).\,a^h}.\int x^{-m+h}(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}.dx$$

Wenn $m$ eine positive ganze Zahl ist, so reducirt sich das Integral wieder wie vorhin auf $\int(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}.dx$

89) $$\int(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}.dx = \frac{(a+2bx).(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{2(n+1)b} - \frac{na^2}{4(n+1)b}.\int(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

90) $$\int(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}}.dx = -\frac{2(a+2bx).(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}}{(n-2)a^2} - \frac{4(n-3)b}{(n-2)a^2}\int(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}.dx$$

91) $\int(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}.dx$

$$=\frac{a+2bx}{2(n+1)b}.\Big\{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}} - \frac{n.a^2}{4(n-1)b}.(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$+\frac{n(n-2).a^4}{4^2.(n-1)(n-3)b^2}.(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-2}$$

$$-\frac{n(n-2)(n-4).a^6}{4^3.(n-1)(n-3)(n-5).b^3}.(ax+bx^2)^{n-3}+\ldots..$$

$$+(-1)^h.\frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2h+2).a^{2h}}{4^h.(n-1)(n-3)\ldots(n-2h+1).b^h}.(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-h}\Big\}$$

$$+(-1)^{h+1}.\frac{n(n-2)\ldots..(n-2h)\,a^{2h+2}}{2.4^{h+1}.(n+1)(n-1)\ldots(n-2h+1).b^{h+1}}\int(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-h-1}.dx$$

Setzt man diese Reduction fort bis $h=\frac{n-1}{2}$, so kommt man zu

92) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\,log\,(a+2bx+2\sqrt{b}\,\sqrt{ax+bx^2}$, wenn der Coefficient von $x^2$ unterm Wurzelzeichen positiv ist, oder zu

93) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\left(sin=\frac{2bx-a}{a}\right)$, wenn der Coefficient von $x^2$ unterm Wurzelzeichen negativ war.

94) $$\int(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}}.dx=-\frac{2(a+2bx)}{(n-2)a^2}\Big\{(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$-\frac{4(n-3).b}{(n-4).a^2}(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+2}+\frac{4^2.(n-3)(n-5).b^2}{(n-4)(n-6).a^2}(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+3}+\ldots.$$

$$\ldots..+(-1)^{h-1}.\frac{4^{h-1}.(n-3)(n-5)\ldots.(n-2h+1).b^{h-1}}{(n-4)(n-6)\ldots.(n-2h).a^{2h-2}}.(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+h}\Big\}$$

$$+(-1)^h.\frac{4^h(n-3)(n-5)\ldots..(n-2h-1).b^h}{(n-2)(n-4)(n-6)\ldots.(n-2h).a^{2h}}.\int(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+h}$$

Wenn man $h=\frac{n-1}{2}$ setzt, so reducirt sich der Ausdruck auf die endliche Reihe, weil das mit dem Integralzeichen behaftete Glied verschwindet.

95) $$\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=arc\left(sin=\frac{x-r}{r}\right)=arc\left(sin\ vers=\frac{x}{r}\right)$$

96) $$\int\frac{x.dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=-\sqrt{2rx-x^2}+r.arc\left(sin=\frac{x-r}{2}\right)$$

97) $$\int \frac{x^2 . dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = -\frac{3r + x}{2} \sqrt{2rx - x^2}$$
$$+ \tfrac{3}{2} r^2 \, arc \left( sin = \frac{x - r}{r} \right)$$

98) $$\int \frac{x^3 . dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = -\sqrt{2rx - x^2} . \left\{ \tfrac{1}{3} x^2 + \tfrac{5}{6} r x + \tfrac{5}{2} r^2 \right\}$$
$$+ \tfrac{5}{2} r^3 arc \left( sin = \frac{x - r}{r} \right)$$

99) $$\int \frac{x^4 . dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = -\sqrt{2rx - x^2} . \left\{ \tfrac{1}{4} x^3 + \tfrac{7}{12} r x^2 + \tfrac{35}{24} r^2 x + \tfrac{35}{8} r^3 \right\}$$
$$+ \tfrac{35}{8} r^4 . arc \left( sin = \frac{x - r}{r} \right)$$

100) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2rx - x^2}} = -\frac{\sqrt{2rx - x^2}}{rx}$$

101) $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2rx - x^2}} = -\frac{(r + x) \sqrt{2rx - x^2}}{3 r^2 x^2}$$

102) $$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{2rx - x^2}} = -\frac{(3r^2 + 2rx + 2x^2) \sqrt{2rx - x^2}}{15 r^3 x^3}$$

103) $$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{2rx - x^2}} = -\frac{(5r^3 + 3r^2 x + 2rx^2 + 2x^3) \sqrt{2rx - x^2}}{35 r^4 x^4}$$

104) $$\int \sqrt{2rx - x^2} . dx = \tfrac{1}{2} (x - r) \sqrt{2rx - x^2}$$
$$+ \tfrac{1}{2} r^2 \, arc \left( sin = \frac{x - r}{r} \right)$$

105) $$\int x \sqrt{2rx - x^2} . dx = -\tfrac{1}{3} (2rx - x^2)^{3/2} + r \int \sqrt{2rx - x^2} . dx$$

106) $$\int x^2 \sqrt{2rx - x^2} . dx = -\left(\tfrac{1}{4} x + \tfrac{5}{12} r\right) (2rx - x^2)^{3/2}$$
$$+ \tfrac{5}{4} r^2 \int \sqrt{2rx - x^2} . dx$$

107) $\int x^3 \sqrt{2rx - x^2}\,.\,dx = -(\frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{10}rx + \frac{7}{12}r^2)(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$+ \frac{7}{4}r^3 \int \sqrt{2rx - x^2}\,.\,dx$$

108) $\int x^4 \sqrt{2rx - x^2}\,.\,dx = -(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{10}rx^2 + \frac{21}{40}r^2 x$

$$+ \frac{7}{8}r^3)(2rx - x^2)^{3/2} + \frac{21 r^4}{8}\int \sqrt{2rx - x^2}\,.\,dx$$

109) $\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$ wird

$\alpha$) wenn $a + cp^2 > 2bp$ ist

$$= -\frac{1}{\sqrt{a - 2bp + cp^2}}\,.\,log\left\{\frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \sqrt{a - 2bp + cp^2}}{x + p} + \frac{b - cp}{\sqrt{a - 2bp + cp^2}}\right\}$$

$\beta$) wenn $a + cp^2 < 2bp$ ist,

$$= \frac{1}{\sqrt{2bp - a - cp^2}}\,.\,arc\left(sin = \frac{(b - cp)(x + p) + a - 2bp + cp^2}{(x + p)\sqrt{b^2 - ac}}\right)$$

$\gamma$) wenn $a + cp^2 = 2bp$ ist,

$$= -\frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{(b - cp)(x + p)}$$

110) Die Form des Integrals der vorigen Nummer wird hauptsächlich dann zur Anwendung kommen, wenn neben der Wurzelgrösse im Nenner ein Polynom als Factor steht, also

$\int \frac{dx}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$. Man zerlegt dann $\frac{1}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots}$ in Partialbrüche und erhält dadurch mehrere Integrale der erwähnten Form. Da aber hierbei offenbar auch häufig imaginäre Factoren erhalten werden und da alsdann das Integral keine übersichtliche Gestalt annimmt, indem das Reelle vom Imaginären nicht gesondert erscheint, so soll auch dieses noch besonders angeführt werden.

$$\int \frac{dx}{(x+pi)\sqrt{a+2bx+cx^2}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a-cp^2-2bpi}} \cdot \log\left\{\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}+\sqrt{a-cp^2-2bpi}}{x+pi} + \frac{b-cpi}{\sqrt{a-cp^2-2bpi}}\right\}$$

Setzt man $\sqrt{a-cp^2-2bpi} = \alpha+\beta i$

$$\frac{b-cpi}{\sqrt{a-cp^2-2bpi}} = \gamma+\delta i$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sich mit Leichtigkeit bestimmen lassen; setzt man ferner:

$$\frac{x\sqrt{a+2bx+cx^2}+\alpha x+\beta p}{x^2+p^2} + \gamma = \varrho \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{-p\sqrt{a+2bx+cx^2}-\alpha p+\beta x}{x^2+p^2} + \delta = \varrho \cdot \sin\varphi$$

wo $\varrho$ und $\varphi$ Funktionen von $x$ sind und, wenn das Integral ein bestimmtes ist, sich stets für die Grenzen berechnen lassen; alsdann wird

$$\int \frac{dx}{(x+pi)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{-\alpha+\beta i}{\alpha^2+\beta^2} \log\left\{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right\}$$

111) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)p} \cdot \left\{\alpha\cdot\varphi - \beta \cdot \log\varrho\right\}$$

112) $$\int \frac{x\,.\,dx}{(x^2+p^2)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{-1}{\alpha^2+\beta^2} \cdot \left\{\beta\cdot\varphi + \alpha\,.\,\log\varrho\right\}$$

113) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

114) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

115) $$\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \cdot \log \left\{ \frac{1+px+\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-x^2}}{x+p} \right\}, \text{ wenn } p^2 < 1,$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \cdot arc \left( sin = \frac{1+x}{x+p} \right), \text{ wenn } p^2 > 1 \text{ ist.}$$

116) $$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \cdot \log \left\{ \frac{1-px+\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-x^2}}{x-p} \right\}, \text{ wenn } p^2 < 1$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \cdot arc \left( sin = \frac{1-px}{x-p} \right), \text{ wenn } p^2 > 1.$$

117) $$\int \frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2p} \int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2p} \int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{1-p^2}} \log . \left\{ \frac{p\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{x^2-p^2}} \right\}, \text{ wenn } p^2 < 1,$$

oder $$= -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \cdot arc \left( sin = \frac{2px\sqrt{p^2-1}\sqrt{1-x^2}}{x^2-p^2} \right), \text{ wenn } p^2 > 1.$$

118) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

119) $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

120) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} - \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

121) $$\int \frac{dx}{(x+pi)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \log \left\{ \frac{[x\sqrt{1+p^2} - pi\sqrt{1-x^2}].[\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-x^2}]}{(x^2+p^2)\sqrt{1+p^2}} \right\}$$

122) $$\int \frac{dx}{(x-pi)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \log\left\{\frac{[x\sqrt{1+p^2}+pi\sqrt{1-x^2}].[\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-x^2}]}{(x^2+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right\}$$

123) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2pi}\int \frac{dx}{(x-pi)\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{1}{2pi}\int \frac{dx}{(x+pi)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2pi\sqrt{1+p^2}} \log\left(\frac{x\sqrt{1+p^2}+pi\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+p^2}-pi\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{1+p^2}} . arc\left(tang = \frac{p\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+p^2}}\right)$$

124) $$\int \frac{x.dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}. \log\left\{\frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+p^2}-\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

125) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(\sqrt{1+x^2}+x)$$

126) $$\int \frac{x.dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$$

127) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log\left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right\}$$

128) $$\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \log\left\{\frac{x+p-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+p^2}}{x+p-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+p^2}}\right\}$$

129) $$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \log\left\{\frac{x-p-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+p^2}}{x-p-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+p^2}}\right\}$$

130) $$\int \frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{1+p^2}}. \log\left\{\frac{(x-\sqrt{1+x^2})^2-(p-\sqrt{1+p^2})^2}{(x-\sqrt{1+x^2})^2-(p+\sqrt{1+p^2})^2}\right\}$$

131) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{1-p^2}} \cdot arc\left(tang = \frac{p\sqrt{1-p^2}}{p^2+x^2-x\sqrt{1+x^2}}\right), \text{ wenn } p^2 < 1$$

und $$= -\frac{1}{2p\sqrt{p^2-1}} \cdot log\left\{\frac{(x-\sqrt{1+x^2})^2+(p-\sqrt{p^2-1})^2}{(x-\sqrt{1+x^2})^2+(p+\sqrt{p^2-1})^2}\right\}$$

132) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

133) $$\int \frac{x \cdot dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

134) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = log\,(\sqrt{x^2-1}+x)$$

135) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc\left(cos = \frac{1}{x}\right)$$

136) $$\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \cdot arc\left(cos = \frac{1+px}{x+p}\right) \text{ wenn } p^2 < 1$$

und $$= -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \cdot log\left\{\frac{1+px+\sqrt{p^2-1}\sqrt{x^2-1}}{x+p}\right\} \text{ wenn } p^2 > 1$$

Setzt man hierin $-p$ für $p$, so erhält man auch $\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{x^2-1}}$

137) $$\int \frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{1-p^2}} \cdot arc\left(cos = \frac{x^2(1-p^2)-p^2(x^2-1)}{(1-p^2)+(x^2-1)}\right), \text{ wenn } p^2 < 1$$

oder $$= \frac{1}{p\sqrt{p^2-1}}\, log\left\{\frac{x\sqrt{p^2-1}-p\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-p^2}}\right\}, \text{ wenn } p^2 > 1$$

138) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{p\sqrt{1+p^2}} \cdot log \left\{ \frac{x\sqrt{p^2+1} - p\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+p^2}} \right\}$$

139) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

140) $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

141) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

142) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot log \left\{ \frac{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}} \right\}$$

143) $$\int \frac{x \cdot dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot arc \left( tang = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+p^2}} \right)$$

144) $$\int x^{m-1} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx = \frac{x^{m-2n} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^{p+1}}{(m+2pn) \cdot c}$$
$$-\frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c} \cdot \int x^{m-n-1} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx$$
$$-\frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c} \cdot \int x^{m-2n-1} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx$$

145) $$\int x^{-m-1} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx = -\frac{x^{-m}(a+bx^n+cx^{2n})^{p+1}}{ma}$$
$$-\frac{(m-pn-n) \cdot b}{ma} \int x^{-m+n-1} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx$$
$$-\frac{(m-2pn-2n)n}{ma} \int x^{-m+2n-1} \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx$$

146) Wenn man der Abkürzung wegen $\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}$ durch $R$ bezeichnet, so dient zur Reduction des Integrals $\int \frac{dx}{(1+nx^2)^p \cdot R}$ folgende Gleichung:

$$\frac{x \cdot R}{(1+nx^2)^{p-1}} = -(2-2p)\left(\alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right) \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^p \cdot R}$$

$$+ (3-2p)\left(\alpha - \frac{2\beta}{n} + \frac{3\gamma}{n^2}\right) \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^{p-1} \cdot R}$$

$$+ (4-2p)\left(\frac{\beta}{n} - \frac{3\gamma}{n^2}\right) \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^{p-2} \cdot R}$$

$$+ (5-2p) \cdot \frac{p}{n^2} \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^{p-3} \cdot R}$$

Wenn man hier dem $p$ verschiedene Zahlenwerthe beilegt, so ergibt sich, dass jedes derartige Integral auf $\int \frac{dx}{(1+nx^2) \cdot R}$ zurückgeführt werden kann, was sich freilich auch nicht in dem gewöhnlichen Sinne endlich integriren lässt, was aber die möglichst einfache Gestalt ist und die dritte Gattung der elliptischen Funktionen bildet.

Die analoge, aber einfachere Reductionsformel für den Fall, dass unter dem Wurzelzeichen nur ein Ausdruck der zweiten Dimension steht, ist folgende unmittelbar aus der vorigen abgeleitete.

$$\frac{x\sqrt{\alpha+\beta x^2}}{(1+nx^2)^{p-1}} = (2p-2) \cdot \left(\alpha - \frac{\beta}{n}\right) \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^p \cdot \sqrt{\alpha+\beta x^2}}$$

$$-(2p-3) \cdot \left(\alpha - \frac{2\beta}{n}\right) \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^{p-1} \cdot \sqrt{\alpha+\beta x^2}}$$

$$-(2p-4) \cdot \frac{\beta}{n} \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)^{p-2} \cdot \sqrt{\alpha+\beta x^2}}$$

## C. Integration transcendenter Funktionen.

### §. 17.

Wenn man im Allgemeinen das transcendente Integral $\int f(e^x) \cdot dx$ hat, so wird man dieses durch die Substitution

$e^x = z$ in $\int \frac{f(z)}{z} . dz$, also in das Integral einer algebraischen Funktion verwandeln können.

Da ferner $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ist, so wird sich auch $\int f(\sin x, \cos x) . dx$ durch dieselbe Substitution algebraisch machen lassen. Man kann in diesem Falle noch eine andere Substitution anwenden, nämlich $tang \frac{1}{2} x = u$, wodurch man erhält $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2 . du}{1+u^2}$; wobei noch zu bemerken ist, dass wenn $f$ eine rationale Funktion ist, auch die transformirte rational sein muss, weil sämmtliche trigonometrische Funktionen eines Winkels sich durch die Tangente des halben Winkels rational ausdrücken lassen. In einzelnen Fällen kommt man auch durch die Einsetzung $\sin x = z$ oder $\cos x = z$ oder noch auf andere Weise zum Ziel, im Allgemeinen jedoch bringt man dadurch Irrationalitäten in die Rechnung.

## §. 18.

### Beispiele.

1) Die aus der Differentialrechnung unmittelbar folgenden Integrationen sind folgende:

$$\int \cos(px+q) . dx = \frac{1}{p} . \sin(px+q)$$

$$\int \sin(px+q)\, dx = -\frac{1}{p} . \cos(px+q)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(px+q)} . dx = \frac{1}{p} . tang\,(px+q)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(px+q)} . dx = -\frac{1}{p} cotg\,(px+q)$$

$$\int \frac{\sin(px+q)}{\cos^2(px+q)} \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \sec(px+q)$$

$$\int \frac{\cos(px+q)}{\sin^2(px+p)} \cdot dx = -\frac{1}{p} \cdot \operatorname{cosec}(px+q)$$

2) $$\int \sin(px+q) \cdot \cos(p'x+q') \cdot dx$$

$$= -\frac{\cos\{(p+p')x+(q+q')\}}{2(p+p')} - \frac{\cos\{(p-p')x+(q-q')\}}{2(p-p')}$$

3) $$\int \sin(px+q) \cdot \sin(p'x+q') \cdot dx$$

$$= \frac{\sin\{(p-p')x+(q-q')\}}{2(p-p')} - \frac{\sin\{(p+p')x+(q+q')\}}{2(p+p')}$$

4) $$\int \cos(px+q) \cdot \cos(p'x+q') \cdot dx$$

$$= \frac{\sin\{(p-p')x+(q-q')\}}{2(p-p')} + \frac{\sin\{(p+p')x+(q+q')\}}{2(p+p')}$$

5)*) $$\int \cos x^{2n} \cdot dx$$

$$= \frac{(2n)_n}{2^{2n}} x + \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (2n)_p \cdot \frac{\sin(2n-2p)x}{(2n-2p)}$$

6) $$\int \cos x^{2n+1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{p=0}^{p=n} (2n+1)_p \cdot \frac{\sin(2n+1-2p)x}{(2n+1-2p)}$$

---

*) In den folgenden Beispielen bedeutet $(2n)_p$ und $(2n+1)_p$ oder eine ähnliche Bezeichnung, wie gewöhnlich den $p$ten Binominal-Coefficien- $(2n)$ten oder $(2n+1)$ten Potenz.

$$\int \sin x^{2n} . dx$$

$$= \frac{(2n)_n}{2^{2n}} . x + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} . \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p . (2n)_p . \frac{\sin(2n-2p)x}{2n-2p}$$

$$\int \sin x^{2n+1} . dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}} . \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p . (2n+1)_p . \frac{\cos(2n+1-2p)x}{2n+1-2p}$$

$$\int \cos x . dx = \sin x$$

$$\int \cos x^2 . dx = \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{1}{2} x$$

$$\int \cos x^3 . dx = \tfrac{1}{12} \sin 3x + \tfrac{3}{4} \sin x$$

$$\int \cos x^4 . dx = \tfrac{1}{32} \sin 4x + \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{3}{8} x$$

$$\int \cos x^5 . dx = \tfrac{1}{80} \sin 5x + \tfrac{5}{48} \sin 3x + \tfrac{5}{8} \sin x$$

$$\int \cos x^6 . dx = \tfrac{1}{192} \sin 6x + \tfrac{3}{64} \sin 4x + \tfrac{15}{64} \sin 2x + \tfrac{5}{16} x$$

$$\int \cos x^7 . dx = \tfrac{1}{448} \sin 7x + \tfrac{7}{320} \sin 5x + \tfrac{7}{64} \sin 3x + \tfrac{35}{64} \sin x$$

.0) $$\int \sin x . dx = -\cos x$$

$$\int \sin x^2 . dx = -\tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{1}{2} x$$

$$\int \sin x^3 . dx = \tfrac{1}{12} \cos 3x - \tfrac{3}{4} \cos x$$

$$\int \sin x^4 . dx = \tfrac{1}{32} \sin 4x - \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{3}{8} x$$

$$\int \sin x^5 . dx = -\tfrac{1}{80} \cos 5x + \tfrac{5}{48} \cos 3x - \tfrac{5}{8} \cos x$$

$$\int \sin x^6 . dx = -\tfrac{1}{192} \sin 6x + \tfrac{3}{64} \sin 4x - \tfrac{15}{64} \sin 2x + \tfrac{5}{16} x$$

$$\int \sin x^7 . dx = \tfrac{1}{448} \cos 7x - \tfrac{7}{320} \cos 5x + \tfrac{7}{64} \cos 3x - \tfrac{35}{64} \cos x$$

11) $$\int \sin x^m . \cos x^n . dx = -\frac{\sin x^{m-1} . \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} . \int \sin x^{m-2} . \cos x^n . dx$$

$$\int \sin x^m . \cos x^n . dx = -\frac{\cos x^{n+1}}{m+n} . \Big\{ \sin x^{m-1} + \frac{m-1}{m+n-2} . \sin x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+n-2)(m+n-4)} . \sin x^{m-5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots\{m-(2k-3)\}}{(m+n-2)(u+n-4)\ldots\{m+n-(2k-2)\}} . \sin x^{m-(2k-1)} \Big\}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots\{m-(2k-1)\}}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots\{m+n-(2k-2)\}} . \int \sin x^{m-2k} . \cos x^n . dx$$

Hierin bedeutet $k$ die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

12) $$\int \sin x^m . \cos x^n . dx = \frac{\sin x^{m+1} . \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} . \int \sin x^m . \cos x^{n-2} . dx .$$

$$\int \sin x^m . \cos x^n . dx = \frac{\sin x^{m+1}}{m+n} . \Big\{ \cos x^{n-1} + \frac{n-1}{m+n-2} . \cos x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(m+n-2)(m+n-4)} . \cos x^{n-5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots\{n-(2k-3)\}}{(m+n-2)(m+n-4)\ldots\{m+n-(2k-2)\}} \cdot \cos x^{n-(2k-1)}\Big\}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots\{n-(2k-1)\}}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots\{m+n-(2k-2)\}} \cdot \int \sin x^m \cdot \cos x^{n-2k} \cdot dx$$

Hier bedeutet $k$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

13) $$\int \sin x^{-m} \cdot \cos x^n \cdot dx = -\frac{\sin x^{-m+1} \cdot \cos x^{n+1}}{m-1}$$

$$+ \frac{m-n-2}{m-1} \int \sin x^{-m+2} \cdot \cos x^n \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} \cdot dx = -\frac{\cos x^{n+1}}{m-1} \cdot \Big\{ \frac{1}{\sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-3} \cdot \frac{1}{\sin x^{m-3}}$$

$$+ \frac{(m-n-2)(m-n-4)}{(m-3)(m-5)} \cdot \frac{1}{\sin x^{m-5}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(m-n-2)(m-n-4)\ldots\{m-n-(2k-2)\}}{(m-3)(m-5)\ldots\{m-(2k-1)\}} \cdot \frac{1}{\sin x^{m-(2k-1)}}\Big\}$$

$$+ \frac{(m-n-2)(m-n-4)\ldots\{m-n-2k\}}{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots\{m-(2k-1)\}} \cdot \int \frac{\cos x^n}{\sin x^{m-2k}} \cdot dx$$

Hier bedeutet $k$ die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

14) $$\int \sin x^m \cdot \cos x^{-n} \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{-n+1}}{n-1}$$

$$+ \frac{n-m-2}{n-1} \int \sin x^m \cdot \cos x^{-n+2} \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1}}{n-1} \Big\{ \frac{1}{\cos x^{n-1}} + \frac{n-m-2}{n-3} \cdot \frac{1}{\cos x^{n-3}}$$

$$+ \frac{(n-m-2)(n-m-4)}{(n-3)(n-5)} \cdot \frac{1}{\cos x^{n-5}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots\{n-m-(2k-2)\}}{(n-3)(n-5)\ldots\{n-(2k-1)\}} \cdot \frac{1}{\cos x^{n-(2k-1)}}\Big\}$$

$$+ \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots\{n-m-2k\}}{(n-3)(n-5)\ldots\{n-(2k-1)\}} \cdot \int \frac{\sin x^m}{\cos x^{n-2k}} \cdot dx$$

Hier bedeutet $k$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

15) Bei der Anwendung der in den letzten vier Nummern genannten Reductionsformeln kommt man, wenn $m$ und $n$ ganze Zahlen sind und wenn man die Reduction weit genug fortsetzt, zuletzt auf eines der folgenden Integrale:

$\alpha)$ $\int dx = x$; $\beta)$ $\int \sin x . dx = -\cos x$; $\gamma)$ $\int \cos x . dx = \sin x$;

$\delta)$ $\int \sin x . \cos x . dx = \frac{1}{2} \sin x^2 = -\frac{1}{2} \cos x^2 = -\frac{1}{4} \cos 2x$;

$\varepsilon)$ $\int \frac{\cos x}{\sin x} . dx = \log . \sin x$; $\zeta)$ $\int \frac{\sin x}{\cos x} . dx = -\log . \cos x$;

$\eta)$ $\int \frac{1}{\sin x} . dx = \log . \tang \frac{1}{2} x$; $\vartheta)$ $\int \frac{1}{\cos x} . dx$

$= \log \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \log . \cotg (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) = \log . \tang (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$;

$\iota)$ $\int \frac{1}{\sin x . \cos x} . dx = \log . \tang x$

16) $\int \frac{1}{\sin x^2} . dx = -\cotg x$; $\int \frac{1}{\cos x^2} . dx = \tang x$

17) $\int \frac{1}{\sin x^2 . \cos x^2} . dx = \tang x - \cotg x$

18) $\int \frac{1}{\sin vers\, x} . dx = -\cotg \frac{1}{2} x$; $\int \frac{1}{\cos vers\, x} . dx = \tang (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x)$

) $\int \cos x^2 . dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \; ; \int \sin x^2 . dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$

) $\int \cos x^2 . \sin x^2 . dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x$

) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log tang \, \frac{1}{2} x$

$\int \frac{dx}{\sin x^2} = - \cot g \, x$

$\int \frac{dx}{\sin x^3} = - \frac{1}{2} . \frac{\cos x}{\sin x^2} + \frac{1}{2} . \log tang \, \frac{1}{2} x$

$\int \frac{dx}{\sin x^4} = - \frac{1}{3} . \frac{\cos x}{\sin x^3} - \frac{2}{3} \cot g \, x$

$\int \frac{dx}{\sin x^5} = - \frac{1}{4} . \frac{\cos x}{\sin x^4} - \frac{3}{8} . \frac{\cos x}{\sin x^2} + \frac{3}{8} . \log tang \, \frac{1}{2} x$

$\int \frac{dx}{\sin x^6} = - \frac{1}{5} . \frac{\cos x}{\sin x^5} - \frac{4}{15} . \frac{\cos x}{\sin x^3} - \frac{8}{15} \cot g \, x$

$\int \frac{dx}{\sin x^7} = - \frac{1}{6} . \frac{\cos x}{\sin x^6} - \frac{5}{24} . \frac{\cos x}{\sin x^4} - \frac{5}{16} . \frac{\cos x}{\sin x^2}$

$+ \frac{5}{16} . \log \; tang \; \frac{1}{2} x$

22) $\int \frac{dx}{\cos x} = \log tang \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} x \right)$

$\int \frac{dx}{\cos x^2} = tang \, x$

$\int \frac{dx}{\cos x^3} = \frac{1}{2} . \frac{\sin x}{\cos x^2} + \frac{1}{2} . \log tang \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} x \right)$

$\int \frac{dx}{\cos x^4} = \frac{1}{3} . \frac{\sin x}{\cos x^3} + \frac{2}{3} . tang \, x$

$\int \frac{dx}{\cos x^5} = \frac{1}{4} . \frac{\sin x}{\cos x^4} + \frac{3}{8} . \frac{\sin x}{\cos x^2} + \frac{3}{8} . \log tang \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} x \right)$

$$\int \frac{dx}{\cos x^6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin x}{\cos x^5} + \frac{4}{15} \cdot \frac{\sin x}{\cos x^3} + \frac{8}{15} \tang x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x^7} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin x}{\cos x^6} + \frac{5}{24} \cdot \frac{\sin x}{\cos x^4} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\sin x}{\cos x^2}$$

$$+ \frac{5}{16} \cdot \log \tang \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} x\right)$$

23. $\int \cos x^2 \sin x \,.\, dx = -\frac{1}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right\}$

$$\int \cos x^2 \sin x^2 \, dx = -\frac{1}{8} \cdot \left\{ \frac{1}{4} \sin 4x - x \right\}$$

$$\int \cos x^2 . \sin x^3 \, dx = \frac{1}{16} \cdot \left\{ \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{3} \cos 3x - 2 \cos x \right\}$$

$$\int \cos x^2 \sin x^4 \, dx = \frac{1}{32} \cdot \left\{ \frac{1}{6} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + 2x \right\}$$

$$\int \cos x^2 . \sin x^5 \, dx = -\frac{1}{64} \cdot \left\{ \frac{1}{7} \cos 7x - \frac{3}{5} \cos 5x + \frac{1}{3} \cos 3x + 5 \cos x \right\}$$

$$\int \cos x^2 . \sin x^6 . dx$$

$$= -\frac{1}{128} \cdot \left\{ \frac{1}{8} \sin 8x - \frac{2}{3} \sin 6x + \sin 4x + 2 \sin 2x - 5x \right\}$$

$$\int \cos x^2 . \sin x^7 . dx$$

$$= \frac{1}{256} \cdot \left\{ \frac{1}{9} \cos 9x - \frac{5}{7} \cos 7x + \frac{8}{5} \cos 5x - 14 \cos x \right\}$$

24. $\int \cos x^3 . \sin x . dx = -\frac{1}{8} \cdot \left\{ \frac{1}{4} \cos 4x + \cos 2x \right\}$

$$\int \cos x^3 . \sin x^2 . dx = -\frac{1}{16} \cdot \left\{ \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin x \right\}$$

$$\int \cos x^3 . \sin x^3 . dx = \frac{1}{32} \cdot \left\{ \frac{1}{6} \cos 6x - \frac{3}{2} \cos 2x \right\}$$

$$\int \cos x^3 . \sin x^4 . dx$$

$$= \tfrac{1}{64} . \left\{ \tfrac{1}{7} \sin 7x - \tfrac{1}{5} \sin 5x - \sin 3x + 3 \sin x \right\}$$

$$\int \cos x^3 . \sin x^5 . dx$$

$$= - \tfrac{1}{128} . \left\{ \tfrac{1}{8} \cos 8x - \tfrac{1}{3} \cos 6x - \tfrac{1}{2} \cos 4x + 3 \cos 2x \right\}$$

$$\int \cos x^3 . \sin x^6 . dx$$

$$= - \tfrac{1}{256} . \left\{ \tfrac{1}{9} \sin 9x - \tfrac{3}{7} \sin 7x + \tfrac{8}{3} \sin 3x - 6 \sin x \right\}$$

$$\int \cos x^3 . \sin x^7 . dx$$

$$= \tfrac{1}{512} . \left\{ \tfrac{1}{10} \cos 10x - \tfrac{1}{2} \cos 8x + \tfrac{1}{2} \cos 6x + 2 \cos 4x - 7 \cos 2x \right\}$$

15) $$\int \cos x^4 . \sin x \, dx = - \tfrac{1}{16} . \left\{ \tfrac{1}{5} \cos 5x + \cos 3x + 2 \cos x \right\}$$

$$\int \cos x^4 . \sin x^2 . dx$$

$$= - \tfrac{1}{32} . \left\{ \tfrac{1}{6} \sin 6x + \tfrac{1}{2} \sin 4x - \tfrac{1}{2} \sin 2x - 2x \right\}$$

$$\int \cos x^4 . \sin x^3 . dx$$

$$= \tfrac{1}{64} . \left\{ \tfrac{1}{7} \cos 7x + \tfrac{1}{5} \cos 5x - \cos 3x - 3 \cos x \right\}$$

$$\int \cos x^4 . \sin x^4 . dx = \tfrac{1}{128} . \left\{ \tfrac{1}{8} \sin 8x - \sin 4x + 3x \right\}$$

$$\int \cos x^4 . \sin x^5 . dx$$

$$= - \tfrac{1}{256} . \left\{ \tfrac{1}{9} \cos 9x - \tfrac{1}{7} \cos 7x - \tfrac{4}{5} \cos 5x + \tfrac{4}{3} \cos 3x + 6 \cos x \right\}$$

$$\int \cos x^4 . \sin x^6 . dx$$

$$= \tfrac{1}{512} . \left\{ \tfrac{1}{10} \sin 10x - \tfrac{1}{4} \sin 8x - \tfrac{1}{2} \sin 6x + 2 \sin 4x + \sin 2x - 6x \right\}$$

$$\int \cos x^4 . \sin x^7 . dx$$

$$= \frac{1}{1024} . \left\{ \frac{1}{11} \cos 11x - \frac{1}{9} \cos 9x - \frac{1}{7} \cos 7x + \frac{11}{5} \cos 5x - 2\cos 3x - 8\cos x \right\}$$

26) Wenn man unter $K_p$ versteht $\sum_{h=0}^{h=p} (-1)^h . (2m)_h . n_{p-h}$, so wird allgemein

$$\int \sin x^{2m} . \cos x^n . dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n-1}} . \sum_{p=0}^{p \overline{\gtrless} m + \frac{n}{2} - 1} K_p . \frac{\sin(2m+n-2p)x}{2m+n-2p}$$

27) und wenn man unter $K_p$ versteht $\sum_{h=0}^{h=p} (-1)^h (2m+1)_h . n_{p-h}$, so ist

$$\int \sin x^{2m+1} . \cos x^n . dx = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m+n}} . \sum_{p=0}^{p \overline{\gtrless} m + \frac{n}{2}} K_p . \frac{\cos(2m+n-2p+1)x}{2m+n-2p+1}$$

28) Wenn $a < b$ und beide in sich positiv angenommen werden, so ist:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left( \frac{\pm b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} . \sin x}{a \pm b \cos x} \right)$$

oder wenn man $a = b \cos \alpha$ setzt:

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{1}{b \sin \alpha} . \log \left( \frac{\cos \frac{\alpha - x}{2}}{\cos \frac{\alpha + x}{2}} \right)$$

und $$\int \frac{dx}{a - b \cos x} = \frac{1}{b \sin \alpha} . \log \left( \frac{\sin \frac{\alpha - x}{2}}{\sin \frac{\alpha + x}{2}} \right)$$

also auch $$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos x^2} = \frac{1}{2ab \sin \alpha} . \log \left( \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)} \right)$$

29) Wenn $a > b$ und wieder beide positiv angenommen werden:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot arc\left(tang = \sqrt{\text{[illegible]}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot arc\left(\cos = \frac{a \cos x \text{ [illegible] } b}{a \pm b \cos x}\right)$$

oder wenn man $b = a \cos \beta$ setzt:

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{a \sin \beta} \cdot arc\left(tang = tang\, \tfrac{1}{2}\beta \,.\, tang\, \tfrac{1}{2} x\right)$$

$$\int \frac{dx}{a - b \cos x} = \frac{2}{a \sin \beta} \cdot arc\left(tang = cotg\, \tfrac{1}{2}\beta \,.\, tang\, \tfrac{1}{2} x\right)$$

also auch $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos x^2} = \frac{1}{a^2 \sin \beta} \cdot arc\left(tang = \frac{tang\, x}{\sin \beta}\right)$

Anm.

$\displaystyle\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$. Wenn man $x = z + arc\left(tang = \frac{c}{b}\right)$

setzt, so verwandelt sich das Integral in $\displaystyle\int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2 + c^2} \,.\, \cos z}$, welches nach Aufg. 28 oder 29 zu behandeln ist.

30) Wenn in den beiden vorhergehenden Nummern statt des Cosinus der Sinus des veränderlichen Winkels gegeben ist, so darf man nur $\frac{\pi}{2} - x$ in die Stelle von $x$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ in die Stelle von $\alpha$ und $\frac{\pi}{2} - \beta$ in die Stelle von $\beta$ setzen, so werden alle genannten Resultate gelten, wenn man ihnen nur das entgegengesetzte Vorzeichen gibt.

31) $\displaystyle\int \frac{\sin x \,.\, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \cdot \log\,(a + b \cos x)$

32) $\displaystyle\int \frac{\cos x \,.\, dx}{a \pm b \cos x} = \pm \frac{x}{b} \mp \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a \pm b \cos x}$

33) $\displaystyle\int \frac{\sin x \,.\, dx}{a \pm b \cos x} = \pm \frac{1}{b} \cdot \log\,(a \pm \cos x)$

34) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^n} . dx = \frac{a\beta - b\alpha}{(n-1)(a^2 - b^2)} \cdot \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)} \cdot \int \frac{(n-1)(a\alpha - b\beta) + (n-2)(a\beta - b\alpha)\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}} . dx$$

35) $$\int (a + b \cos x)^n (\alpha + \beta \cos x) . dx = \frac{\beta}{n+1} (a + b \cos x)^n . \sin x$$

$$+ \int (a + b \cos x)^{n-1} . \left\{ \left[ a\alpha + \frac{n}{n+1} b\beta \right] + \left[ b\alpha + \frac{n}{n+1} a\beta \right] \cos x \right\} . dx$$

36) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos x^2 + \delta \cos x^3 + \ldots\ldots}{(a + b \cos x)^n} . dx$$

$$= f(a) \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} - \frac{f'(a)}{1} \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{f''(a)}{1.2} \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}} - \frac{f'''(a)}{1.2.3} \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-3}} + \ldots.$$

Hierin soll $\alpha - \beta . \frac{a}{b} + \gamma . \frac{a^2}{b^2} - \delta . \frac{a^3}{b^3} + \ldots$ durch $f(a)$ und die nur in Bezug auf $a$ gebildeten Differentialquotienten der Reihe nach durch $f'(a)$, $f''(a)$ u. s. w. bezeichnet sein. — Hierdurch reducirt sich das vorgegebene Integral auf ein solches, welches sich unmittelbar aus Aufg. 34 ergibt, wenn man darin $\beta = 0$ setzt, und welches nach einfacher Reduction folgende Gestalt annimmt:

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = - \frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)} \cdot \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)} \cdot \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} \cdot \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}}$$

37) $$\int \frac{\alpha + \beta \sin x + \gamma \sin x^2 + \delta \sin x^3 + \ldots\ldots}{(a + b \cos x)^n} . dx$$

Dieses Integral zerlegt sich auf ganz elementarem, wenn auch etwas weitläufigem Wege in folgende beide:

$$\int \frac{A'+B'\cos x^2+C'\cos x^4+\dots}{(a+b\cos x)^n}\,.\,dx\,;$$

$$\int \frac{\left\{A''+B''\cos x^2+C''\cos x^4+\dots\dots\right\}}{(a+b\cos x)^n}\sin x\,.\,dx$$

Das erstere lässt sich in Gemässheit der vorigen Nummer behandeln und das zweite verwandelt sich in ein ganz gewöhnliches algebraisches Integral, wenn man $a+b\cos x$ einer einfachen neuen Variabeln $z$ gleichsetzt. — Die genau detaillirte Ausführung der im Allgemeinen gehaltenen Rechnung hat keinen erheblichen Zweck.

38) $$\int \frac{\alpha+\beta\,.\cos x}{\sin x\,(a+b\cos x)}\,.\,dx = \frac{b\alpha-a\beta}{a^2-b^2}\,.\log(a+b\cos x)$$

$$-\frac{\alpha-\beta}{a-b}\,.\log\cos\tfrac{1}{2}x+\frac{\alpha+\beta}{a+b}\,.\log\sin\tfrac{1}{2}x$$

39) $$\int \frac{\alpha+\beta\,.\cos x}{\cos x\,(a+b\cos x)}\,.\,dx = \frac{\alpha}{a}\,.\log tang\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)$$

$$+\frac{a\beta-b\alpha}{a}\int \frac{dx}{a+b\cos \alpha}$$

wo das letztere Integral, je nach dem gegenseitigen Verhältniss der Constante, aus Aufg. 28 oder 29 zu entnehmen ist.

40) $$\int \frac{a+b\,.\sin x+c\,.\cos x}{\sin 2x}\,.\,dx = \frac{a}{2}\,.\log tang\,x$$

$$+\frac{b}{2}\,.\log tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)+\frac{c}{2}\,.\log tang\,\tfrac{1}{2}x$$

41) $$\int \frac{a+b\,.\sin x+c\,.\cos x}{\cos 2x}\,.\,dx = \frac{a}{2}\log tang(\tfrac{1}{4}\pi+x)$$

$$+\frac{c-b}{2\sqrt{2}}\,.\log tang\left(\frac{\pi}{8}+\tfrac{1}{2}x\right)-\frac{c+b}{2\sqrt{2}}\,.\log tang\left(\frac{\pi}{8}-\tfrac{1}{2}x\right)$$

42) $$\int \frac{a+b\sin x+c\cos x+d\sin x^2+e\cos x^2}{\sin 3x}\,.\,dx$$

$$=\frac{a+e}{3}\log tang\,{}^3/_2{}^x+\frac{b}{2\sqrt{3}}\log\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\right\}$$

$$+\frac{c}{6}\log\left(\frac{\sin x^3}{\sin 3x}\right)+\frac{d-e}{4}\log\left\{\cot g\left(\frac{\pi}{6}+\tfrac{1}{2}x\right)\cot g\left(\frac{\pi}{6}-\tfrac{1}{2}x\right)\right\}$$

43) $$\int\frac{a+b\sin x+c\cos x+d\sin x^2+e\cos x^2}{\cos 3x}.dx$$

$$=\frac{a+d}{3}\log\tan g\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{3}{2}x\right)+\frac{b}{6}\log\left(\frac{\cos x^3}{\cos 3x}\right)$$

$$+\frac{c}{2\sqrt{3}}\log\left\{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}\right\}+\frac{e-d}{4}\log.\left\{tg\left(\frac{\pi}{12}+\tfrac{1}{2}x\right)\cot g\left(\frac{\pi}{12}-\tfrac{1}{2}x\right)\right\}$$

44) $$\int\frac{\cos x^m}{\cos nx}.dx$$

$$=\frac{1}{n}.\sum_{h=0}^{h=n-1}(-1)^h.\left[\cos\frac{(2h+1)\pi}{2n}\right]^m.\log\left\{\frac{\sin\left[\frac{(2h+1)\pi}{4n}+\tfrac{1}{2}x\right]}{\sin\left[\frac{(2h+1)\pi}{4n}-\tfrac{1}{2}x\right]}\right\}$$

45) $$\int\frac{\cos x^{2n}}{\sin 2nx}.dx$$

$$=\frac{1}{2n}.\sum_{h=1}^{h=n-1}(-1)^h.\left(\cos\frac{h\pi}{2n}\right)^{2m}.\log\left(1-\frac{\sin^2\frac{h\pi}{2n}}{\sin^2 x}\right)$$

46) $$\int\frac{\cos x^{2m+1}}{\sin 2nx}.dx$$

$$=\frac{1}{2n}.\sum_{h=1}^{h=n-1}(-1)^h.\left(\cos\frac{h\pi}{2n}\right)^{2m+1}.\left\{\log\left[\tan g\left(\frac{x}{2}-\frac{h\pi}{4n}\right).\tan g\left(\frac{x}{2}+\frac{h\pi}{4n}\right)\right]\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{h\pi}{2n}\log\tan g\,\tfrac{1}{2}x\right\}$$

47) $\int \frac{\cos x^{2m}}{\sin(2n+1)x} . dx$

$$=\frac{1}{2n+1}.\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^h\left(\cos\frac{h\pi}{2n+1}\right)^{2m}\left\{\log\left[\tang\left(\frac{x}{2}-\frac{h\pi}{4n+2}\right).\tang\left(\frac{x}{2}+\frac{h\pi}{4n+2}\right)\right.\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{h\pi}{2n+1}\log\tang\tfrac{1}{2}x\right\}$$

48) $\int \frac{\cos x^{2m+1}}{\sin(2n+1)x} . dx$

$$=\frac{1}{2n+1}.\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^h.\left(\cos\frac{h\pi}{2n+1}\right)^{2m+1}.\log\left(1-\frac{\sin^2\frac{h\pi}{2n+1}}{\sin^2 x}\right)$$

Wenn man in den letzten fünf Formeln $\frac{\pi}{2}-x$ in die Stelle von $x$ setzt, so erhält man ganz analoge Ausdrücke, welche im Zähler die Potenz des $\sin x$ enthalten.

49) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x} . dx = 2\sin x - \log\tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x^2} . dx = 2x - \tang x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x^3} . dx = -\frac{\sin x}{2\cos x^2}+\tfrac{3}{2}\log\tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x^4} . dx = \tfrac{1}{3}\tang x\left(4-\frac{1}{\cos x^2}\right)$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x^5} . dx = \tfrac{1}{8}\tang x\left(\frac{5}{\cos x}-\frac{2}{\cos x^3}\right)$$

$$+\tfrac{5}{8}\log\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x^6} . dx = \tfrac{1}{5}\tang x\left(4+\frac{2}{\cos x^2}-\frac{1}{\cos x^4}\right)$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x^7} . dx = \frac{1}{6} \tan g\, x \left( \frac{21}{8 \cos x} + \frac{7}{4 \cos x^3} - \frac{1}{\cos x^5} \right)$$
$$+ \frac{7}{16} \log \tan g \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right)$$

50) $$\int \frac{\cos 2x}{\sin x} . dx = 2 \cos x + \log \tan g \frac{1}{2} x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x^2} . dx = -2x - \cot g\, x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x^3} . dx = -\frac{\cos x}{2 \sin x^2} - \frac{3}{2} \log \tan g \frac{1}{2} x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x^4} . dx = -\frac{\cos x}{3 \sin x^3} + \frac{4}{3} \cot g\, x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x^5} . dx = \frac{1}{8} \cot g\, x \left( \frac{5}{\sin x} - \frac{2}{\sin x^3} \right) - \frac{5}{8} \log \tan g \frac{1}{2} x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x^6} . dx = \frac{1}{5} \cot g\, x \left( \frac{2}{\sin x^2} - \frac{1}{\sin x^4} \right) + \frac{4}{5} \cot g\, x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x^7} . dx = \frac{1}{2} \cot g\, x \left( \frac{7}{8 \sin x} + \frac{7}{12 \sin x^3} - \frac{1}{3 \sin x^5} \right)$$
$$- \frac{7}{16} \log \tan g \frac{1}{2} x$$

51) $$\int \frac{\sin 2x}{\cos x} . dx = -2 \cos x$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^2} . dx = -2 \log \cos x$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^3} . dx = \frac{2}{\cos x}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^4} . dx = \frac{1}{\cos x^2}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^5} . dx = \frac{2}{3 \cos x^3}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^6} . dx = \frac{1}{2 \cos x^4}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^7} . dx = \frac{1}{2 \cos x^5}$$

. . . . . . . . . .

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x^n} . dx = \frac{2}{(n-2) \cos x^{n-2}}$$

52) $$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} . dx = 2 \sin x$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x^2} . dx = 2 . \log \sin x$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x^3} . dx = \frac{2}{\sin x}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x^4} . dx = \frac{1}{\sin x^2}$$

. . . . . . . . . .

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x^n} . dx = \frac{2}{(n-2) \sin x^{n-2}}$$

3) $$\int \frac{\cos 3x}{\cos x} . dx = 2 \sin x \cos x - x$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos x^2} . dx = 4 \sin x - 3 \log \ \mathrm{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} x \right)$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos x^3} . dx = 4x - 3 \,\mathrm{tang}\, x$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos x^4} . dx = - \frac{3 \sin x}{2 \cos x^2} + \tfrac{5}{2} \log \mathrm{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} x \right)$$

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos x^5} . dx = tg\, x . \left( 2 - \frac{1}{\cos x^2} \right)$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos x^6} . dx = \tfrac{1}{8} \tang x \left( \frac{7}{\cos x} - \frac{6}{\cos x^3} \right)$$
$$+ \tfrac{7}{8} \log \tang (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} x)$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos x^7} . dx = \tfrac{1}{15} \tang x \left( 16 + \frac{8}{\cos x^2} - \frac{9}{\cos x^4} \right)$$

54) $$\int \frac{\cos 3x}{\sin x} . dx = -2 \sin x^2 + \log \sin x$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin x^2} . dx = -4 \sin x - \frac{1}{\sin x}$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin x^3} . dx = -\frac{1}{2 \sin x^2} - 4 \log \sin x$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin x^4} . dx = -\frac{1}{3 \sin x^3} + \frac{4}{\sin x}$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin x^5} . dx = -\frac{1}{4 \sin x^4} + \frac{2}{\sin x^2}$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin x^6} . dx = -\frac{1}{5 \sin x^5} + \frac{4}{3 \sin x^3}$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin x^n} . dx = -\frac{1}{(n-1) \sin x^{n-1}} + \frac{4}{(n-3) \sin x^{n-3}}$$

55) $$\int \frac{\sin 3x}{\cos x} . dx = 2 \sin x^2 + \log \cos x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos x^2} . dx = -4 \cos x - \frac{1}{\cos x}$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos x^3} . dx = -\frac{1}{2 \cos x} - 4 \log \cos x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos x^4} . dx = \frac{4}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos x^3}$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos x^5} . dx = \frac{2}{\cos x^2} - \frac{1}{4 \cos x^4}$$

. . . . . . . . . . . . .

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos x^n} . dx = \frac{4}{(n-3) \cos x^{n-3}} - \frac{1}{(n-1) \cos x^{n-1}}$$

56) $$\int \frac{\sin 3x}{\sin x} . dx = x + 2 \sin x \cos x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x^2} . dx = 3 \log tang \tfrac{1}{2} x + 4 \cos x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x^3} . dx = -3 \cot g\, x - 4x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x^4} . dx = -\tfrac{3}{2} \cot g\, x . \frac{1}{\sin x} - \tfrac{5}{2} \log tang \tfrac{1}{2} x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x^5} . dx = \cot g\, x . \left\{ - \frac{1}{\sin x^2} + 2 \right\}$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x^6} . dx = \tfrac{1}{4} \cot g\, x . \left\{ - \frac{3}{\sin x^3} + \frac{7}{2 \sin x} \right\} - \tfrac{7}{8} \log tang \tfrac{1}{2} x$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x^7} . dx = \tfrac{1}{5} \cot g\, x . \left\{ - \frac{3}{\sin x^4} + \frac{8}{3 \sin x^2} + \tfrac{16}{3} \right\}$$

57) $$\int \frac{\cos n x}{\cos x^m}$$

$$= . \sum_{p=0}^{p \leqq \frac{1}{2} n} (-1)^p . \frac{n}{n-p} . 2^{n-2p-1} . (n-p)_p . \int \cos x^{n-2p-m} . dx$$

58) $$\int \frac{\sin n x}{\cos x^m} = \sum_{p=0}^{p \geqq \frac{n}{2} - 1} (-1)^{p+1} . 2^{n-2p-1} . \frac{(n-p-1)_p}{n-2p-m} . \cos x^{n-2p-m}$$

Setzt man in diesen beiden Formeln $\frac{\pi}{2} - x$ in die Stelle von $x$, so erhält man die entsprechenden Formeln, welche im Nenner einer Potenz von $\sin x$ haben.

Um das in 57 noch enthaltene Integral zu entwickeln, wendet man die allgemeine Reductionsformel Nr. 12, S. 250 an, wenn man darin entweder $m$ oder $n$ verschwinden lässt. Um dieselben auch in dieser einfachern Gestalt gegenwärtig zu haben, mögen sie hier ihren Platz finden.

59) $$\int \cos x^n . dx = \frac{1}{n} \cos x^{n-1} . \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos x^{n-2} . dx$$

$$\int \sin x^n . dx = -\frac{1}{n} \sin x^{n-1} . \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2} . dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin x^{n-2}}$$

60) $$\int x^n \cos x . dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x . dx$$

$$= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x . dx$$

$$\int x \cos x . dx = \cos x + x \sin x$$

$$\int x^2 \cos x . dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$$

$$\int x^3 \cos x . dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x$$

$$\int x^4 \cos x . dx = (4x^3 - 24x) \cos x + (x^4 - 12x^2 + 24) \sin x$$

$$\int x^5 \cos x \,.\, dx = (5x^4 - 60x^2 + 120) \cos x + (x^5 - 20x^3 + 120x) \sin x$$

$$\int x^6 \cos x \,.\, dx = (6x^5 - 120x^3 + 720x) \cos x$$
$$+ (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \sin x$$

$$\int x^7 \cos x \,.\, dx = (7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5040) \cos x$$
$$+ (x^7 - 42x^5 + 840x^3 - 5040x) \sin x$$

$$\int x^n \sin x \,.\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \,.\, \cos x \,.\, dx$$

$$= -x^n \,.\, \cos x + n x^{n-1} \,.\, \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \,.\, \sin x \,.\, dx$$

$$\int x \sin x \,.\, dx = \sin x - x \cos x$$

$$\int x^2 \sin x \,.\, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$$

$$\int x^3 \sin x \,.\, dx = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x$$

$$\int x^4 \sin x \,.\, dx = (4x^3 - 24x) \sin x - (x^4 - 12x^2 + 24) \cos x$$

$$\int x^5 \sin x \,.\, dx = (5x^4 - 60x^2 + 120) \sin x - (x^5 - 20x^3 + 120x) \cos x$$

$$\int x^6 \sin x \,.\, dx = (6x^5 - 120x^3 + 720x) \sin x$$
$$- (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \cos x$$

$$\int x^7 \sin x \,.\, dx = (7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5040) \sin x$$
$$- (x^7 - 42x^5 + 840x^3 - 5040x) \cos x$$

$$\int \frac{\cos x}{x^n} \,.\, dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \,.\, \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} \,.\, dx$$

$$= -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \cdot \int \frac{\cos x}{x^{n-2}} \cdot dx$$

$$= \sum_{h=1}^{h \overline{\overline{<}} \frac{n-1}{2}} (-1)^{h+1} \cdot \frac{x \sin x - (n-2h)\cos x}{(n-1)(n-1)(n-3)\ldots(n-2h)}$$

$$+ (-1)^h \cdot \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-2h)} \int \frac{\cos x \cdot dx}{x^{n-2h}}$$

63) $$\int \frac{\sin x}{x^n} \cdot dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \cdot \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} \cdot dx$$

$$= -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \cdot \int \frac{\sin x}{x^{n-2}} \cdot dx$$

$$= \sum_{h=1}^{h \overline{\overline{<}} \frac{n-1}{2}} (-1)^h \cdot \frac{x \cos x + (n-2h)\sin x}{(n-1)(n-2)\ldots n-2h}$$

$$+ (-1)^h \cdot \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-2h)} \int \frac{\sin x \cdot dx}{x^{n-2h}}$$

64) $$\int \frac{\cos x}{x^2} \cdot dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x^3} \cdot dx = -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \tfrac{1}{2} \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x^4} \cdot dx = -\frac{\cos x}{3x^3} + \frac{\sin x}{6x^2} + \frac{\cos x}{6x} + \tfrac{1}{6} \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x^5} \cdot dx = -\frac{\cos x}{4x^4} + \frac{\sin x}{12x^3} + \frac{\cos x}{24x^2} - \frac{\sin x}{24x}$$

$$+ \tfrac{1}{24} \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x^6} \cdot dx = -\frac{\cos x}{5x^5} + \frac{\sin x}{20x^4} + \frac{\cos x}{60x^3} - \frac{\sin x}{120x^2} - \frac{\cos x}{120x}$$

$$- \tfrac{1}{120} \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x^7} \cdot dx = -\frac{\cos x}{6x^6} + \frac{\sin x}{30x^5} + \frac{\cos x}{120x^4} - \frac{\sin x}{360x^3} - \frac{\cos x}{720x^2}$$

$$+ \frac{\sin x}{720x} - \tfrac{1}{720} \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$$

) $$\int \frac{\sin x}{x^2} \cdot dx = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^3} \cdot dx = -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \tfrac{1}{2} \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^4} \cdot dx = -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{\cos x}{6x^2} + \frac{\sin x}{6x} - \tfrac{1}{6} \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^5} \cdot dx = -\frac{\sin x}{4x^4} - \frac{\cos x}{12x^3} + \frac{\sin x}{24x^2} + \frac{\cos x}{24x}$$

$$+ \tfrac{1}{24} \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^6} \cdot dx = -\frac{\sin x}{5x^5} - \frac{\cos x}{20x^4} + \frac{\sin x}{60x^3} + \frac{\cos x}{120x^2} - \frac{\sin x}{120x}$$

$$+ \tfrac{1}{120} \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^7} \cdot dx = -\frac{\sin x}{6x^6} - \frac{\cos x}{30x^5} + \frac{\sin x}{120x^4} + \frac{\cos x}{360x^3} - \frac{\sin x}{720x^2}$$

$$- \frac{\cos x}{720x} + \tfrac{1}{720} \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

In diesen vier letzten Aufgaben reducirt sich Alles auf $\int \frac{\sin x}{x} dx$ oder $\int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$, welches beides auf den sogenann-
n Integrallogarithmus führt.

B) $$\int \frac{x \cdot dx}{\cos x^n} = \frac{(n-2)x \cdot \sin x - \cos x}{(n-2)(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x \cdot dx}{\cos x^{n-2}}$$

$$= \frac{(n-2)x \cdot \sin x - \cos x}{(n-2)(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{(n-4)x \sin x - \cos x}{(n-4)(n-3)\cos x^{n-3}}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{(n-6)\,x\sin x-\cos x}{(n-6)(n-5)\cos x^{n-5}}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2h+2)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-2h+3)}\cdot\frac{(n-2h)\,x\sin x-\cos x}{(n-2h)(n-2h+1)\cos x^{n-2h+1}}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2h)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-2h+1)}\int\frac{x\,.\,dx}{\cos x^{n-2h}}$$

$$=\sum_{h=1}^{h\leqq\frac{n-1}{2}}\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)_{h-1}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{h-1}}\cdot\frac{(n-2h)\,x\sin x-\cos x}{(n-2h)\,.\,(n-2h+1)\cos x^{n-2h+1}}$$

$$+\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)_h}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_h}\int\frac{x\,.\,dx}{\cos x^{n-2h}}$$

67) $$\int\frac{x\,.\,dx}{\sin x^n}=-\frac{\sin x+(n-2)\,x\cos x}{(n-2)(n-1)\sin x^{n-1}}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\,.\,dx}{\sin x^{n-2}}$$

$$=-\frac{\sin x+(n-2)\,x\cos x}{(n-2)(n-1)\sin x^{n-1}}-\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\sin x+(n-4)\,x\cos x}{(n-4)(n-3)\sin x^{n-3}}$$

$$-\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{\sin x+(n-6)\,x\cos x}{(n-6)(n-5)\sin x^{n-5}}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2h+2)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-2h+3)}\cdot\frac{\sin x+(n-2h)\,x\cos x}{(n-2h)(n-2h+1)\sin x^{n-2h+1}}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2h)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-2h+1)}\int\frac{x\,.\,dx}{\sin x^{n-2h}}$$

$$=-\sum_{h=1}^{h\leqq\frac{n-1}{2}}\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)_{h-1}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{h-1}}\cdot\frac{\sin x+(n-2h)\,x\cos x}{(n-2h)(n-2h+1)\sin x^{n-2h+1}}$$

$$+\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)_h}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_h}\int\frac{x\,.\,dx}{\sin x^{n-2h}}$$

In den beiden letzten Formeln muss man wesentlich zwischen einem geraden und einem ungeraden $n$ unterscheiden. Wenn $n$ unge-

rade ist, hat man $k$ von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ zu nehmen und es reduciren sich dann die Integrationen auf $\int \frac{x\,dx}{\cos x}$ und $\int \frac{x\,dx}{\sin x}$, welche wie bei den ähnlichen Aufgaben 62 — 65 auf den Integrallogarithmus führen; ist dagegen $n$ gerade, so darf man $k$ nur von 1 bis $\frac{n-2}{2}$ nehmen, wodurch sich die Integrationen auf $\int \frac{x\,dx}{\cos x^2}$ und $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$ reduciren.

68) $$\int \frac{x\,dx}{\cos x^2} = x \tang x + \log \cos x$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x^3} = \frac{x \sin x - \cos x}{2 \cos x^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{x\,dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x^4} = \frac{2x \sin x - \cos x}{6 \cos x^3} + \tfrac{2}{3}(x \tang x + \log \cos x)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x^5} = \frac{3x \sin x - \cos x}{12 \cos x^4} + \frac{3(x \sin x - \cos x)}{8 \cos x^2} + \tfrac{3}{8} \int \frac{x\,dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x^6} = \frac{4x \sin x - \cos x}{20 \cos x^5} + \frac{2(2x \sin x - \cos x)}{15 \cos x^3} + \tfrac{8}{15}(x \tang x + \log \cos x)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x^7} = \frac{5x \sin x - \cos x}{30 \cos x^6} + \frac{5(3x \sin x - \cos x)}{72 \cos x^4} + \frac{5(x \sin x - \cos x)}{16 \cos x^2} + \tfrac{5}{16} \int \frac{x\,dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x^8} = \frac{6x \sin x - \cos x}{42 \cos x^7} + \frac{3(4x \sin x - \cos x)}{70 \cos x^5} + \frac{4(2x \sin x - \cos x)}{35 \cos x^3} + \tfrac{16}{35}(x \tang x + \log \cos x)$$

69) $$\int \frac{x\,dx}{\sin x^2} = -x \cotg x + \log \sin x$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sin x^3}=-\frac{\sin x+x\cos x}{2\sin x^2}+\tfrac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sin x}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sin x^4}=-\frac{\sin x+2x\cos x}{6\sin x^3}-\tfrac{2}{3}.\left\{x\,cotg\,x-\log\sin x\right\}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sin x^5}=-\frac{\sin x+3x\cos x}{12\sin x^4}-\frac{3(\sin x+x\cos x)}{8\sin x^2}$$
$$+\tfrac{3}{8}.\int\frac{x\,dx}{\sin x}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sin x^6}=-\frac{\sin x+4x\cos x}{20\sin x^5}-\frac{2(\sin x+2x\cos x)}{15\sin x^3}$$
$$-\tfrac{8}{15}\left\{x\,cotg\,x-\log\sin x\right\}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sin x^7}=-\frac{\sin x+5x\cos x}{30\sin x^6}-\frac{5(\sin x+3x\cos x)}{72\sin x^4}$$
$$-\frac{5(\sin x+x\cos x)}{16\sin x^2}+\tfrac{5}{16}\int\frac{x\,dx}{\sin x}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sin x^8}=-\frac{\sin x+6x\cos x}{42\sin x^7}-\frac{6(\sin x+4x\cos x)}{140\sin x^5}$$
$$-\frac{4(\sin x+2x\cos x)}{35\sin x^3}-\tfrac{16}{35}.\left\{x\,cotg\,x-\log\sin x\right\}$$

70) Wenn man eine Funktion und ihr erstes Integral in Bezug auf $x$ durch $X$ und $'X$ bezeichnet und wenn $z$ irgend eine Funktion von $x$ bedeutet, so wird:

$$\int X.z^n.dx=z^n.'X-n\int 'X.z^{n-1}\frac{dz}{dx}.dx$$

71) $$\int X.(\log x)^n.dx='X.(\log x)^n-n\int\frac{'X}{x}.(\log x)^{n-1}.dx$$

Die in ihrer vollkommenen Allgemeinheit gehaltene Reductions-formel wird für die Aufzeichnung unbequem, deshalb möge lieber Specielleres folgen:

$$72)\quad \int x^m.(\log x)^n.dx = x^{m+1}.\left\{\frac{(\log x)^n}{m+1} - \frac{n(\log x)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(\log x)^{n-2}}{(m+1)^3}\cdots\cdots\right\}$$

Wenn hierin $n$ eine positive ganze Zahl ist und zu gleicher Zeit $m$ von $-1$ verschieden ist, dann schliesst sich die Reihe von selbst. Wäre $m=-1$, so hätte man:

$$73)\quad \int \frac{(\log x)^n}{x}.dx = \frac{1}{n+1}.(\log x)^{n+1}$$

$$74)\quad \int \frac{x^m.dx}{\sqrt{\log x}} = x^{m+1}.\left\{\frac{1}{(m+1)(\log x)^{1/2}} + \frac{1}{2(m+1)^2(\log x)^{3/2}} + \frac{1.3}{4(m+1)^3(\log x)^{5/2}} + \frac{1.3.5}{8(m+1)^4(\log x)^{7/2}} + \cdots\right\}$$

$$75)\quad \int \frac{x^m.dx}{(\log x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(\log x)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(\log x)^{n-3}} - \cdots$$
$$- \frac{(m+1)^{n-2}x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.(\log x)} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}.\int \frac{x^m\,dx}{\log x}$$

$$76)\quad \int x^m.\log x.dx = \frac{x^{m+1}.\log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$77)\quad \int (a+bx)^m.\log x.dx = \frac{(a+bx)^{m+1}.\log x}{(m+1)b} - \frac{1}{(m+1)b}\int \frac{(a+bx)^{m+1}}{x}.dx$$

$$78)\quad \int \frac{\log x}{(a+bx)^m}.dx = -\frac{\log x}{(m-1)b(a+bx)^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)b}\int \frac{dx}{x(a+bx)^{m-1}}$$

Die Integrale, auf die sich die beiden letzten Aufgaben reduciren,

lassen sich nach der Integration der gewöhnlichen rationalen Differentiale behandeln, wie einige specielle Beispiele, die hier nachfolgen, zeigen.

79) $$\int (a+bx)\log x\,.dx = \frac{(a+bx)^2}{2b}\log x - \frac{a^2}{2b}\log x - ax - \tfrac{1}{4}bx^2$$

$$\int (a+bx)^2\log x\,.dx = \frac{(a+bx)^3}{3b}\log x - \frac{a^3}{3b}\log x - a^2x - \frac{abx^2}{2} - \frac{b^2x^3}{9}$$

$$\int (a+bx)^3\log x\,.dx = \frac{(a+bx)^4}{4b}\log x - \frac{a^4}{4b}\log x - a^3x - \tfrac{3}{4}a^2bx^2 - \tfrac{1}{3}a^2b^2x^3 - \tfrac{1}{16}b^3x^4$$

80) $$\int \frac{\log x}{a+bx}\,.dx = \frac{1}{b}\log x.\log(a+bx) - \frac{1}{b}\int \frac{1}{x}\log(a+bx).dx$$

Das hierin noch übrigbleibende Integral lässt sich nicht anders, als durch die Entwickelung von $\log(a+bx)$ in eine Reihe bestimmen.

81) $$\int \frac{\log x}{(a+bx)^2}\,.dx = -\frac{\log x}{b(a+bx)} + \frac{1}{ab}\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

$$\int \frac{\log x}{(a+bx)^3}\,.dx = -\frac{\log x}{2b(a+bx)^2} + \frac{1}{2ab(a+bx)} + \frac{1}{2a^2b}\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

$$\int \frac{\log x}{(a+bx)^4}\,.dx = -\frac{\log x}{3b(a+bx)^3} + \frac{1}{6ab(a+bx)^2} + \frac{1}{3a^2b(a+bx)} + \frac{1}{3a^3b}\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

$$\int \frac{\log x}{(a+bx)^5}\,.dx = -\frac{\log x}{4b(a+bx)^4} + \frac{1}{12ab(a+bx)^3} + \frac{1}{8a^2b(a+bx)^2} + \frac{1}{4a^3b(a+bx)} + \frac{1}{4a^4b}\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

$$\int \frac{\log x}{(a+bx)^6}\,.dx = -\frac{\log x}{5b(a+bx)^5} + \frac{1}{20ab(a+bx)^4}$$

$$+\frac{1}{15a^2b(a+bx)^3}+\frac{1}{10a^3b(a+bx)^2}+\frac{1}{5a^4b(a+bx)}$$

$$+\frac{1}{5a^5b}\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

$$\int\frac{\log x}{(a+bx)^7}.dx=-\frac{\log x}{6b(a+bx)^6}+\frac{1}{30ab(a+bx)^5}$$

$$+\frac{1}{24a^2b(a+bx)^4}+\frac{1}{18a^3b(a+bx)^3}+\frac{1}{12a^4b(a+bx)^2}$$

$$+\frac{1}{6a^5b(a+bx)}+\frac{1}{6a^6b}\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int\frac{\log x}{(a+bx)^n}.dx=-\frac{\log x}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}}$$

$$+\frac{1}{(n-1)ab}.\left\{\frac{1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}}+\frac{1}{(n-3)a(a+bx)^{n-3}}\right.$$

$$+\frac{1}{(n-4)a^2(a+bx)^{n-4}}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{2.a^{n-4}(a+bx)^2}+\frac{1}{1.a^{n-3}(a+bx)}\right\}$$

$$+\frac{1}{(n-1)a^{n-1}b}.\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$$

**Diese allgemeine Formel ist natürlich nur richtig, wenn $n$ grösser als die Einheit ist.**

82) $$\int\frac{1}{x\sqrt{x}}\log\left(\frac{1}{1-x}\right).dx=\frac{2\log(1-x)}{\sqrt{2}}+2\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

83) $$\int x^m.e^x.dx=x^n.e^x-m\int x^{m-1}.e^x.dx$$

84) $$\int x.e^x.dx=e^x.(x-1)$$

$$\int x^2.e^x.dx=e^x.(x^2-2x+2)$$

$$\int x^3 . e^x . dx = e^x . (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$$

$$\int x^4 . e^x . dx = e^x . (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$$

$$\int x^5 . e^x . dx = e^x . (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)$$

$$\int x^6 . e^x . dx = e^x . (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720)$$

$$\int x^7 . e^x . dx = e^x . (x^7 - 7x^6 + 42x^5 - 210x^4 + 840x^3$$
$$- 2520x^2 + 5040x - 5040)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int x^m . e^x . dx$$
$$= e^x . \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p . 1.2.3 \ldots p . (m_p) . x^{m-p}$$

85) $$\int \frac{e^x . dx}{x^m} = - \frac{e^x}{(m-1)\, x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{e^x . dx}{x^{m-1}}$$

86) $$\int \frac{e^x . dx}{a^2} = - \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x . dx}{x}$$

$$\int \frac{e^x . dx}{x^3} = - \tfrac{1}{2} e^x \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) + \tfrac{1}{2} \int \frac{e^x . dx}{x}$$

$$\int \frac{e^x . dx}{x^4} = - \tfrac{1}{3} e^x \left( \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} \right) + \tfrac{1}{6} \int \frac{e^x . dx}{x}$$

$$\int \frac{e^x . dx}{x^5} = - \tfrac{1}{4} e^x \left( \frac{1}{x^4} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6x} \right) + \tfrac{1}{24} \int \frac{e^x . dx}{x}$$

$$\int \frac{e^x . dx}{x^6} = - \tfrac{1}{5} e^x \left( \frac{1}{x^5} + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{24x} \right) + \tfrac{1}{120} \int \frac{e^x . dx}{x}$$

$$\int \frac{e^x . dx}{x^7} = -\tfrac{1}{6} e^x \left( \frac{1}{x^6} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{20x^4} + \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{120x^2} + \frac{1}{120\,x} \right) + \tfrac{1}{720} \int \frac{e^x . dx}{x}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int \frac{e^x . dx}{x^m} = -e^x . \sum \frac{1}{1.2.3 \ldots p . (m-1)_p . x^{m-p}} + \frac{1}{1.2.3 \ldots (m-1)} . \int \frac{e^x . dx}{x}$$

87) $\int x^m . a^{nx} . dx$

Wenn man hierin $a^n = e^k$, d. h. also $k$ als den natürlichen Logarithmus von $a^n$ nimmt und darauf $kx = z$ setzt, so verwandelt sich dieses Integral in $\frac{1}{k^{m+1}} . \int z^m . e^z . dz$, welches sich nach den vier letzten Nummern behandeln lässt.

88) $$\int e^{ax} . \cos x . dx = \frac{e^{ax} (\sin x + a \cos x)}{1 + a^2}$$

89) $$\int e^{ax} \sin x . dx = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{1 + a^2}$$

90) $$\int e^{ax} . \cos x^n . dx = \frac{e^{ax} \cos x^{n-1} (n \sin x + a \cos x)}{n^2 + a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} . \int e^{ax} . \cos x^{n-2} . dx$$

$$\int e^{ax} . \cos x^2 . dx = \frac{e^{ax} \cos x (2 \sin x + a \cos x)}{a^2 + 4} + \frac{2 e^{ax}}{a(a^2 + 4)}$$

$$\int e^{ax} . \cos x^3 . dx = \frac{e^{ax} \cos x^2 (3 \sin x + a \cos x)}{a^2 + 9} + \frac{6 e^{ax} (\sin x + a \cos x)}{(a^2 + 1)(a^2 + 9)}$$

$$\int e^{ax} . \cos x^4 . dx = \frac{e^{ax} \cos x^3 (4 \sin x + a \cos x)}{a^2 + 16}$$

$$+ \frac{12 e^{ax} \cos x (2 \sin x + a \cos x)}{(a^2 + 4)(a^2 + 16)} + \frac{24 e^{ax}}{a(a^2 + 4)(a^2 + 16)}$$

$$\int e^{ax} . \cos x^5 . dx = \frac{e^{ax} \cos x^4 (5 \sin x + a \cos x)}{a^2 + 25}$$

$$+ \frac{20 e^{ax} \cos x^2 (3 \sin x + a \cos x)}{(a^2 + 9)(a^2 + 25)} + \frac{120 e^{ax} (\sin x + a \cos x)}{(a^2 + 1)(a^2 + 9)(a^2 + 25)}$$

$$\int e^{ax} . \cos x^6 . dx = \frac{e^{ax} \cos x^5 (6 \sin x + a \cos x)}{a^2 + 36}$$

$$+ \frac{30 e^{ax} \cos x^3 (4 \sin x + a \cos x)}{(a^2 + 16)(a^2 + 36)} + \frac{360 e^{ax} \cos x (2 \sin x + a \cos x)}{(a^2 + 4)(a^2 + 16)(a^2 + 36)}$$

$$+ \frac{720 e^{ax}}{a(a^2 + 4)(a^2 + 16)(a^2 + 36)}$$

91) $$\int e^{ax} . \sin x . dx = \frac{e^{ax} \sin x^{n-1} (a \sin x - n \cos x)}{n^2 + a^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} \int e^{ax} . \sin x^{n-2} . dx$$

$$\int e^{ax} . \sin x^2 . dx = \frac{e^{ax} \sin x \, (a \sin x - 2 \cos x)}{a^2 + 4} + \frac{2 e^{ax}}{a(a^2 + 4)}$$

$$\int e^{ax} . \sin x^3 . dx = \frac{e^{ax} \sin x^2 \, (a \sin x - 3 \cos x)}{a^2 + 9}$$

$$+ \frac{6 e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{(a^2 + 1)(a^2 + 9)}$$

$$\int e^{ax} . \sin x^4 . dx = \frac{e^{ax} \sin x^3 (a \sin x - 4 \cos x)}{a^2 + 16}$$

$$+ \frac{12 e^{ax} \sin x (a \sin x - 2 \cos x)}{(a^2 + 4)(a^2 + 16)} + \frac{24 e^{ax}}{a(a^2 + 4)(a^2 + 16)}$$

$$\int e^{ax} . \sin x^5 . dx = \frac{e^{ax} \sin x^4 (a \sin x - 5 \cos x)}{a^2 + 25}$$

$$+ \frac{20 e^{ax} \sin x^2 (a \sin x - 3 \cos x)}{(a^2 + 9)(a^2 + 25)} + \frac{120 e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{(a^2 + 1)(a^2 + 9)(a^2 + 25)}$$

$$\int e^{ax} \sin x^6 . dx = \frac{e^{ax} \sin x^5 (a \sin x - 6 \cos x)}{a^2 + 36}$$

$$+ \frac{30 e^{ax} \sin x^3 (a \sin x - 4 \cos x)}{(a^2 + 16)(a^2 + 36)} + \frac{360 e^{ax} \sin x (a \sin x - 2 \cos x)}{(a^2+4)(a^2 + 16)(a^2 + 36)}$$

$$+ \frac{720 e^{ax}}{a(a^2+4)(a^2+16)(a^2+36)}$$

92) $\int \frac{e^{ax} . dx}{\cos x^n}$

$$= -\frac{c^{ax} \left\{ a \cos x - (n-2) \sin x \right\}}{(n-1)(n-2) \cos x^{n-1}} + \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax} . dx}{\cos x^{n-2}}$$

93) $\int \frac{e^{ax} . dx}{\sin x^n}$

$$= -\frac{e^{ax} \left\{ a \sin x + (n-2) \cos x \right\}}{(n-1)(n-2) \sin x^{n-1}} + \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax} . dx}{\sin x^{n-2}}$$

94) $\int e^{ax} . \cos x^m . \sin x^n . dx$

$$= \frac{e^{ax} \cos x^{m-1} \sin x^n \left\{ a \cos x + (m+n) \sin x \right\}}{(m+n)^2 + a^2}$$

$$- \frac{n a}{(m+n)^2 + a^2} . \int e^{ax} \cos x^{m-1} \sin x^{n-1} dx$$

$$+ \frac{(m-1)(m+n)}{(m+n)^2 + a^2} . \int e^{ax} \cos x^{m-2} \sin x^n dx$$

95) $\int e^{ax} . \cos x^m . \sin x^n . dx$

$$= \frac{e^{ax} \cos x^m \sin x^{n-1} \left\{ a \sin x - (m+n) \cos x \right\}}{(m+n)^2 + a^2}$$

$$+ \frac{m a}{(m+n)^2 + a^2} . \int e^{ax} \cos x^{m-1} \sin x^{n-1} . dx$$

$$+ \frac{(n-1)(m+n)}{(m+n)^2 + a^2} . \int e^{ax} \cos x^m \sin x^{n-2} . dx$$

96) $\int e^{ax}.\cos x^m.\sin x^n.dx$

$$= \frac{e^{ax}\cos x^{m-1}\sin x^{n-1}(a\sin x\cos x + m\sin x^2 - n\cos x^2)}{(m+n)^2+a^2}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2+a^2}.\int e^{ax}\cos x^{m-2}\sin x^n.dx$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(m+n)^2+a^2}.\int e^{ax}\cos x^m\sin x^{n-2}.dx$$

97) $\int e^{ax}.\cos x^m.\sin x^n.dx$

$$= \frac{e^{ax}\cos x^{m-1}\sin x^{n-1}(a\cos x\sin x + m\sin x^2 - n\cos x^2)}{(m+n)^2+a^2}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2+a^2}.\int e^{ax}\cos x^{m-2}\sin x^{n-2}dx$$

$$+ \frac{(n-m)(n+m-1)}{(m+n)^2+a^2}.\int e^{ax}\cos x^m\sin x^{n-2}dx$$

98) $\int e^{ax}.\tang x^n.dx = \frac{e^{ax}.\tang x^{n-1}}{n-1} - \frac{a}{n-1}\int e^{ax}\tang x^{n-1}.dx$

$$-\int e^{ax}\tang x^{n-2}.dx$$

$$\int e^{ax}.\tang x^2.dx = \frac{e^{ax}}{a}.\left\{a\tang x - 1\right\} - a\int e^{ax}\tang x.dx$$

$$\int e^{ax}.\tang x^3.dx = \tfrac{1}{2}.e^{ax}\left\{\tang x^2 - a\tang x + 1\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}(a^2-2)\int e^{ax}\tang x.dx$$

$$\int e^{ax}.\tang x^4.dx = \tfrac{1}{6}.\frac{e^{ax}}{a}.\left\{2a\tang x^3 - a^2\tang x^2\right.$$

$$\left.+ a(a^2-6)\tang x - a^2 + 6\right\} - \tfrac{1}{6}a(a^2-8)\int e^{ax}\tang x.dx$$

$$\int e^{ax}.tang\,x^5.dx = \tfrac{1}{24}.e^{ax}.\Big\{6\,tang\,x^4 - 2\,a\,tang\,x^3 + (a^2-12)\,tang\,x^2 - a\,(a^2-18)\,tang\,x + a^2 - 18\Big\} + \tfrac{1}{24}(a^4 - 20\,a^2 + 24)\int e^{ax}.tang\,x.\,d\,x$$

99) $\int x^n.e^{ax}.(cos\,b\,x + i\,sin\,b\,x).dx$

$$= \frac{x^n.e^{ax}.(cos\,b\,x + i\,sin\,b\,x)}{a+bi}.\Big\{1 - \frac{n}{(a+b\,i)\,x} + \frac{n(n-1)}{(a+b\,i)^2\,x^2}\ldots\ldots + (-1)^n\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{(a+b\,i)^n\,x^n}\Big\}$$

100) $\int arc\,(sin = x).dx = x.arc\,(sin = x) + \sqrt{1-x^2}$

101) $\int arc\,(cos = x).dx = x.arc\,(cos = x) - \sqrt{1-x^2}$

102) $\int arc\,(tang = x).dx = x.arc\,(tang = x) - log\,\sqrt{1+x^2}$

103) $\int arc\,(cotg = x).dx = x.arc\,(cotg = x) + log\,\sqrt{1+x^2}$

104) $\int arc\,(sec = x).dx = x.arc\,(sec = x) - log\,(x + \sqrt{x^2-1}$

105) $\int arc\,(cosec = x).dx = x.arc\,(cosec = x) + log\,(x + \sqrt{x^2-1}$

106) $\int arc\,(sin\,vers = x).dx = (x-1).arc\,(sin\,vers = x) + \sqrt{2x-x^2}$

107) $\int arc\,(cos\,vers = x).dx = (x+1).arc\,(cos\,vers = x) - \sqrt{2x-x^2}$

108) $\int x^n.arc\,(sin = x).dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.arc\,(sin = x) - \frac{1}{n+1}.\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

109) $$\int x^n . arc(cos = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} . arc(cos = x)$$
$$+ \frac{1}{n+1} . \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} . dx$$

Die Integrale in den beiden letzten Aufgaben ergeben sich aus Aufg. 36 und 37 auf S. 227.

110) $$\int x^n . arc(tang = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} . arc(tang = x)$$
$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} . dx$$

111) $$\int x^n . arc(cotg = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} . arc(cotg = x)$$
$$+ \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} . dx$$

Für die beiden letzten Aufgaben erhält man,

wenn $n$ gerade ist:

$$\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} . dx$$
$$= \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}-1} (-1)^h . \left(\frac{n}{2}\right)_h . \frac{(n+x^2)^{\frac{n}{2}-h}}{n-2h} + (-1)^{\frac{n}{2}} . log \sqrt{1+x^2}$$
$$= \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}-1} (-1)^h . \frac{x^{n-2h}}{n-2h} + (-1)^{\frac{n}{2}} . log \sqrt{1+x^2}$$

und wenn $n$ ungerade ist:

$$\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} . dx = \sum_{h=0}^{h=\frac{n-1}{2}} (-1)^h . \frac{x^{n-2h}}{n-2h}$$

112) $$\int x^n . arc(sec = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} . arc(sec = x)$$
$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n . dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

13) $\int x^n . arc(cosec = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} . arc\ (cosec = x)$

$$+ \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n . dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Für diese beiden Aufgaben erhält man,
wenn $n$ gerade ist:

$$\int \frac{x^n . dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{x^2 - 1} . \sum_{h=0}^{h=\frac{n}{2}-1} \frac{(n-1)(n-3) \ldots . (n-2h+1)}{n . (n-2)(n-4) \ldots . (n-2h)} . x^{n-2h-1}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3) \ldots . 3.1}{n(n-2) \ldots . . 2} log (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

und wenn $n$ ungerade ist:

$$\int \frac{x^n . dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1} . \sum_{h=0}^{h=\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3) \ldots (n-2h+1)}{n . (n-2)(n-4) \ldots (n-2h)} x^{n-2h-1}$$

In diesen beiden Summenausdrücken ist zu beachten, dass für $h = 0$ der Zähler des Coefficienten $= 1$ wird.

14) $\int x^n . arc(sin\,vers = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} arc(sin\,vers = x)$

$$- \frac{1}{n+1} . \int \frac{x^{n+1} . dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

15) $\int x^n . arc\ (cos\,vers = x) . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} arc\ (cos\,vers = x)$

$$+ \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} . dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Für diese beiden Aufgaben hat man:

$$\int \frac{x^{n+1} . dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= - \sqrt{2x - x^2} . \sum_{h=1}^{h=n+1} \frac{(2n+1)(2n-1) \ldots . . (2n-2h+5)}{(n+1) n (n-1) \ldots . (n-h+1)} . x^{n-h+1}$$

$$+\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots.3.1}{(n+1)n(n-1)\ldots.2.1}\, arc(sin\, vers = x)$$

Bei diesem Summenausdruck ist noch zu beachten, dass für $h=1$ der Zähler des Coefficienten $=1$ zu setzen ist.

116) $$\int \frac{arc(sin = x).dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}.\left\{arc(sin = x)\right\}^2$$

117) $$\int \frac{arc(cos = x).dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\left\{arc\,(cos = x)\right\}^2$$

118) $$\int \frac{arc(tang = x).dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\left\{arc\,(tang = x)\right\}^2$$

119) $$\int \frac{arc(cotg = x).dx}{1+x^2} = -\tfrac{1}{2}\left\{arc(cotg = x)\right\}^2$$

120) $$\int \frac{arc(sec = x).dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \tfrac{1}{2}\left\{arc\,(sec = x)\right\}^2$$

121) $$\int \frac{arc(cosec = x).dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\tfrac{1}{2}\left\{arc\,(cosec = x)\right\}^2$$

122) $$\int \frac{arc(sin\, vers = x).dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \tfrac{1}{2}\left\{arc(sin\, vers = s)\right\}^2$$

123) $$\int \frac{arc(cos\, vers = x).dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\left\{arc(cos\, vers = x)\right\}^2$$

124) $$\int arc(sin = x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\left\{arc(sin = x)\right\}^2$$

$$\int arc\,(sin = x).\frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2}.\,arc(sin = x)$$

$$\int arc\,(sin = x).\frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.\,arc(sin = x)$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{arc\,sin = x)\right\}^2$$

$$\int arc(sin = x).\frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}.\,arc(sin = x)$$

$$\int arc(sin = x) \cdot \frac{x^4 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{16}x^2$$

$$- \tfrac{1}{8}(2x^3 + 3x)\sqrt{1-x^2} . arc(sin = x) + \tfrac{3}{16}\left\{arc\ (sin = x)\right\}^2$$

$$\int arc(sin = x) \cdot \frac{x^5 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{45}x^3 + \tfrac{8}{15}x$$

$$-\tfrac{1}{15}(3x^4 + 4x^2 + 8)\sqrt{1-x^2} . arc\ (sin = x)$$

$$\int arc(sin = x) \cdot \frac{x^6 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{36}x^6 + \tfrac{5}{96}x^4 + \tfrac{15}{96}x^2$$

$$\tfrac{1}{48}(8x^5 + 10x^3 + 15x)\sqrt{1-x^2} . arc(sin = x) + \tfrac{55}{192}\left\{arc\ (sin = x)\right\}^2$$

$$\int arc(sin = x) \cdot \frac{x^7 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{49}x^7 + \tfrac{6}{175}x^5 + \tfrac{8}{105}x^3 + \tfrac{16}{35}x$$

$$-\tfrac{1}{35}(5x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 16)\sqrt{1-x^2} . arc(sin = x)$$

25) $$\int arc(sin = x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x . arc(sin = x)}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}log(1-x^2)$$

26) $$\int arc(sin = x) \cdot \frac{x . dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{arc\ (sin = x)}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}\ log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

27) $$\int arc\ (tang = x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\left\{arc(tang = x)\right\}^2$$

$$\int arc(tang = x) \cdot \frac{x . dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\ arc(tang = x) . log(1+x^2)$$

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{log\ (1+x^2) . dx}{1+x^2}$$

$$\int arc\ (tang = x) \cdot \frac{x^2 . dx}{1+x^2} = x . arc\ (tang = x) - \tfrac{1}{2}\ log\ (1+x^2)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{arc\ (tang = x)\right\}^2$$

$$\int arc(tang = x) \cdot \frac{x^3 . dx}{1+x^2} = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(1+x^2) . arc\ (tanq = x)$$

$$-\int arc(tang = x) \cdot \frac{x . dx}{1+x^2}$$

$$\int arc\,(tang=x)\,.\,\frac{x^4\,.\,dx}{1+x^2}=-\tfrac{1}{6}x^2+\tfrac{2}{3}\log(1+x^2)$$

$$+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)arc\,(tang=x)+\tfrac{1}{2}\left\{arc\,(tang=x)\right\}^2$$

128) $$\int arc(sin=x)\,.\,f(x)\,.\,dx=arc\,(sin=x)\,.\int f(x)\,.\,dx$$

$$-\int\frac{dx\,.\int f(x)\,.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int arc(cos=x)\,.\,f(x)\,.\,dx=arc\,(cos=x)\,.\int f(x)\,.\,dx$$

$$+\int\frac{dx\,.\int f(x)\,.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int arc(tang=x)\,.\,f(x)\,.\,dx=arc\,(tang=x)\,.\int f(x)\,dx$$

$$-\int\frac{dx\,.\int f(x)\,.\,dx}{1+x^2}$$

$$\int arc(cotg=x)\,.\,f(x)\,.\,dx=arc\,(cotg=x)\,.\int f(x)\,dx$$

$$+\int\frac{dx\,.\int f(x)\,.\,dx}{1+x^2}$$

$$\int arc(sec=x)\,.\,f(x)\,.\,dx=arc\,(sec=x)\,.\int f(x)\,dx$$

$$-\int\frac{dx\,.\int f(x)\,.\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int arc\,(cosec = x) \,.\, f(x) \,.\, dx = arc\,(cosec = x) \,.\, \int f(x)\, dx + \int \frac{dx \,.\, \int f(x) \,.\, dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int arc\,(sin\,vers = x) \,.\, f(x) \,.\, dx = arc\,(sin\,vers = x) \,.\, \int f(x) \,.\, dx - \int \frac{dx \,.\, \int f(x) \,.\, dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$\int arc\,(cos\,vers = x) \,.\, f(x) \,.\, dx = arc\,(cos\,vers = x) \,.\, \int f(x) \,.\, dx + \int \frac{dx \,.\, \int f(x) \,.\, dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

---

# VIII. Integrale zwischen bestimmten Grenzen.

## §. 19.

### Beispiele.

1) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\pi$

2) $\int_0^a \frac{x \,.\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a.$ Dieses und die nächsten Integrale bis Nro. 8 erhält man aus Beispiel 36 und 37 auf S. 227.

3) $\int_0^a \frac{x^2 \,.\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2} a^2 \,.\, \frac{\pi}{2}$

4) $\int_0^a \frac{x^3 \,.\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2}{3} a^3$

5) $\int_0^a \frac{x^4 . dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{3}{8} a^4 . \frac{\pi}{2}$

6) $\int_0^a \frac{x^5 . dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{8}{15} a^5$

7) $\int_0^a \frac{x^{2r} . dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6...2r} . a^{2r} . \frac{\pi}{2}$

8) $\int_0^a \frac{x^{2r+1} . dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2.4.6....2r}{1.3.5..(2r+1)} . a^{2r+1}$

9) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{1}{2} . a^2 . \frac{\pi}{2}$. Dieses und die Integrale bis 1 erhält man aus Beispiel 30 un 31 auf S. 223.

10) $\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{1}{3} a^3$

11) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{1}{8} a^4 . \frac{\pi}{2}$

12) $\int_0^a x^3 \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{2}{15} a^5$

13) $\int_0^a x^4 \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{1}{16} a^6 . \frac{\pi}{2}$

14) $\int_0^a x^5 \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{8}{105} a^7$

15) $\int_0^a x^{2r} \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6....(2r+2)} . a^{2r+2} . \frac{\pi}{2}$

16) $\int_0^a x^{2r+1} \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{2.4.6....2r}{3.5.7....(2r+3)} . a^{2r+3}$

17) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \pi$

18) $\int_0^1 \frac{x^{2r} . dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1.3.5.7....(2r-1)}{2.4.6...2r} . \frac{\pi}{2}$

19) $$\int_0^1 \frac{x^{2r+1}.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6....2r}{1.3.5....(2r-1)(2r+1)}$$

20) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi$$

21) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi$$

22) $$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi$$

23) $$\int_0^\infty \frac{x^m.dx}{1+x^n} = \frac{\frac{1}{n}\pi}{\sin\frac{m+1}{n}\pi}$$

24) $$\int_0^1 x^{n-1}.dx = \frac{1}{n}$$

25) Wenn man die soeben genannte Gleichung in Bezug auf $n$ wiederholt differentiirt, so erhält man

$$\int_0^1 x^{n-1}.(\log x).dx = -\frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^1 x^{n-1}.(\log x)^2.dx = \frac{1.2}{n^3}$$

$$\int_0^1 x^{n-1}.(\log x)^3.dx = -\frac{1.2.3}{n^4}$$

$$\int_0^1 x^{n-1}.(\log x)^4.dx = \frac{1.2.3.4}{n^5}$$

. . . . . . . . . . . .

26) Wenn man die Gleichung 24. in Bezug auf $n$ wiederholt integrirt, findet man:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\log x}.dx = \log n$$

$$\int_0^1 \left\{\frac{x^n-1}{x(\log x)^2} - \frac{n}{\log x}\right\}.dx = n\log n - n$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{x^n - 1}{x(\log x)^3} - \frac{n}{x(\log x)^2} - \frac{n^2}{2 \log x} \right\} . dx = \frac{n^2}{2} \log n - \tfrac{3}{4} n^2$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{x^n - 1}{x(\log x)^4} - \frac{n}{x(\log x)^3} - \frac{n^2}{2x(\log x)^2} - \frac{n^3}{6 \log x} \right\} . dx$$

$$= \tfrac{1}{6} n^3 \log n - \tfrac{11}{36} n^3$$

27) Wenn man in den letzten Gleichungen $x = e^{-z}$ setzt, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-nz} . dz = \frac{1}{n}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-nz}}{z} . dz = \log n$$

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{n e^{-z}}{z} - \frac{1 - e^{-nz}}{z^2} \right\} . dz = n . \log n - n$$

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{n^2 e^{-z}}{2z} - \frac{n}{z^2} + \frac{1 - e^{-nz}}{z^3} \right\} . dz = \frac{n^2}{2} . \log n - \tfrac{3}{4} n^2$$

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{n^2 e^{-z}}{6z} - \frac{n^2}{2z^2} + \frac{n}{z^3} - \frac{1 - e^{-nz}}{z^4} \right\} . dz = \tfrac{1}{6} n^3 . \log n - \tfrac{11}{36} n^3$$

28) $$\int_0^\infty e^{-nx} . \sin x . dx = \frac{1}{n + 1}$$

Wenn man diese Gleichung in Bezug auf $n$ differentiirt, so wird:

29) $$\int_0^\infty e^{-nx} . x \sin x . dx = \frac{2n}{(n^2 + 1)^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} . x^2 \sin x . dx = \frac{2(3n^2 - 1)}{(n^2 + 1) 3}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} . x^3 \sin x . dx = \frac{24 n (n^2 - 1)}{(n^2 + 1)^4}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^4 \sin x . dx = \frac{24(5n^4 - 10n^2 + 1)}{(n^2 + 1)^5}$$

30) Wenn man die Gleichung 28. in Bezug auf $n$ zwischen den Grenzen 0 und $n$ integrirt, so wird

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-nx}}{x} . \sin x . dx = arc\,(tang = n)$$

Setzt man hierin noch $n = \infty$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} . dx = \frac{\pi}{2}$$

31) $$\int_0^\infty e^{-nx} . \cos x . dx = \frac{n}{n^2+1}$$

32) Wenn man diese Gleichung wiederholt in Bezug auf $n$ differentiirt, so wird

$$\int_0^\infty e^{-nx} . x \cos x . dx = \frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} . x^2 \cos x . dx = \frac{2n(n^2-3)}{(n^2+1)^3}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} . x^3 \cos x . dx = \frac{6(n^4-5)}{(n^2+1)^4}$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} . x^4 \cos x . dx = \frac{24n(n^4-n^2-10)}{(n^2+1)^5}$$

33) Wenn man die Gleichung 31. in Bezug auf $n$ zwischen den Grenzen 0 und $n$ integrirt, so wird

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-nx}}{x} . \cos x . dx = \tfrac{1}{2} \log(n^2+1)$$

34) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} . dx = \frac{\pi}{2}$$

35) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} . e^{-mx} . dx = arc\left(tang = \frac{a}{m}\right)$$

36) $$\int_0^\infty x^n . a^{-x} . dx = 1.2.3 \ldots n . \frac{1}{(\log a)^{n+1}}$$

37) $\int_0^\infty x^n . e^{-mx} . dx = 1.2.3 \ldots n . \frac{1}{m^{p+1}}$

38) $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{x}} . dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$

39) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sqrt{x}} . dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$

40) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} . dx = \frac{\pi}{2} . e^{-a}$

41) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+p^2x^2} . dx = \frac{\pi}{2p} . e^{-\frac{a}{p}}$

42) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} . dx = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} . \frac{\pi}{2}$

43) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} . dx = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)} . \frac{1}{2n+1}$

44) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} . dx = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} . \frac{\pi}{2}$

45) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} . dx = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)} . \frac{1}{2n+1}$

46) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos mx . (\cos x)^{2n} . dx$

$$= \frac{1.2.3.4 \ldots (2n-1).2n}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots([2n]^2-m^2)} . \frac{1}{m} . \sin \frac{m\pi}{2}$$

47) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos mx . (\cos x)^{2n+1} . dx$

$$= \frac{1.2.3.4 \ldots 2n.(2n+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots([2n+1]^2-m^2)} . \cos \frac{m\pi}{2}$$

48) $\int_0^\infty e^{-ax} . \cos bx . dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

49) $$\int_0^\infty e^{-ax}.\sin bx.dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

50) $$\int_0^\infty \frac{\sin bx - \sin cx}{x}.e^{ax}.dx = arc\left(tang = \frac{a(b-c)}{a^2+bc}\right)$$

51) $$\int_0^\infty \frac{\cos cx - \cos bx}{x}.e^{-ax}.dx = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}\right)$$

52) $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}.e^{-ax}.dx = arc\left(tang = \frac{b}{a}\right)$$

53) $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}.dx = \frac{\pi}{2}$$

54) $$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-bx}}{x}.\cos ax.dx = \tfrac{1}{2} \log \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$$

55) $$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-bx}}{x}.\sin ax.dx = arc\left(tang = \frac{a(b-c)}{a^2+bc}\right)$$

56) $$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-bx}}{x}.dx = \log \frac{b}{c}$$

51) $$\int_0^1 \frac{x^{c-1} - x^{b-1}}{\log x}.dx = \log \frac{c}{b}$$

58) $\int_0^\pi \log(1+2a\cos x+a^2).dx = 0$, wenn $a$ an absoluter Grösse kleiner als 1.

59) $\int_0^\pi \log(1+2a\cos x+a^2).dx = \pi \log a^2$, wenn $a$ an absoluter Grösse grösser als 1.

60) $$\int_0^\pi \log(1+\cos x).dx = -\pi \log 2$$

61) $$\int_0^\pi \log(1-\cos x).dx = -\pi \log 2$$

62) $\int_0^\pi log\, sin\, x\,.\,dx = -\pi\, log\, 2$

63) $\int_0^\pi \frac{log\, sin\, x}{1+2a\, cos\, x + a^2}\,.\,dx = \frac{\pi}{1-a^2}\,.\,log\,\frac{1-a^2}{2},$

wenn $a$ an absoluter Grösse kleiner als 1.

64) $\int_0^\pi \frac{log\, sin\, x}{1+2a\, cos\, x + a^2}\,.\,dx = \frac{\pi}{a^2-1}\, log\,\frac{a^2-1}{2},$

wenn $a$ an absoluter Grösse grösser als 1.

65) $\int_0^\infty log\left(\frac{b^2+x^2}{c^2+x^2}\right).\,cos\, ax\,.\,dx = \frac{\pi}{2}\,(e^{-ca} - e^{-ba})$

66) $\int_0^{2\pi} log\,\frac{1+2a\, cos\, x + a^2}{1+2a\, cos\, nx + a^2}\,.\,dx = 0$

67) $\int_0^{2\pi} cotg\,.\,\tfrac{1}{2}x\,.\,log\,\frac{1+2a\, cos\, x + a^2}{1+2a\, cos\, nx + a^2}\,.\,dx = 0$

68) $\int_0^{2\pi} \frac{sin\, nx}{1-a\, cos\, x}\,.\,dx = 0,$ wenn $> 1$ und $n$ eine positive ganze Zahl.

69) $\int_0^{2\pi} \frac{cos\, nx}{1-a\, cos\, x}\,.\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,.\left\{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}^n$

70) $\int_0^{2\pi} \frac{cos\, nx}{1-a\, cos\, x}\,.\,x\, dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}\,.\left\{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}^n$

## §. 20.

### Anwendung der Integral-Rechnung auf Geometrie.

Wenn eine ebene Curve durch die Gleichung $y = f(x)$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, so wird der Flächenraum eines Stücks, welches von zwei Ordinaten, der Abscissenaxe und einem Curvenbogen begrenzt ist, ausgedrückt durch $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,.\,dx$

$= \int_{x_1}^{x_2} y \, . \, dx$. Wenn die Fläche begrenzt wird von zwei Ordinaten und von zwei Curven, deren Gleichungen sind $y = f(x)$ und $\eta = \varphi(x)$, so wird der Ausdruck $\int_{x_1}^{x_2} \{ f(x) - \varphi(x) \} . dx$. Die Länge des Curvenbogens zwischen denselben Grenzen ist $= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \, . \, dx$.

Wenn die Curve durch eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten, nämlich durch $f(r, \varphi) = 0$ gegeben ist, so wird der Flächeninhalt eines Sectors, d. h. eines Raumes, der von einem Curvenbogen und zwei Leitstrahlen begrenzt wird, die respective die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ mit der XAxe bilden $= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 . d\varphi$ und die Länge des zugehörigen Curvenbogens $= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2} \, . \, d\varphi$. In allen diesen Ausdrücken darf der Differentialquotient, der unter dem Integralzeichen steht, zwischen den bezüglichen Grenzen weder durch 0, noch durch $\infty$ gehen.

Wenn eine Curve doppelter Krümmung durch die beiden Gleichungen $f(x, y, z) = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, so wird die Länge des Curvenbogens

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} \, . \, dx.$$

Wenn eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, so wird der Theil der Oberfläche, welcher einer Seits von zwei Ebenen begrenzt wird, die in den Entfernungen $x_1$ und $x_2$ parallel mit der $YZ$Ebene gelegt sind, und andrer Seits von Ebenen, die in den Entfernungen $y_1$ und $y_2$ parallel mit der $XZ$Ebene gehen:

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2} \, . \, dx \, . \, dy$$

oder wenn die Oberfläche durch die Gleichung $F(x,y,z)=u=0$ gegeben ist:

$$=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}}{\frac{du}{dz}}.dx.dy$$

Wenn die Oberfläche durch die Umdrehung der ebenen Curve $y=f(x)$ um die $X$Axe entstanden ist, so wird der Flächeninhalt derselben

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx$$

Der cubische Inhalt eines Stücks, welches von den vorhin genannten vier Ebenen, sodann von der $XY$Ebene selbst und von der krummen Oberfläche begrenzt wird, ist

$$=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}z.dx.dy$$

Wenn der Körper ein Rotationskörper ist, welcher durch die Umdrehung einer von zwei ebenen Curven $y=f(x)$ und $\eta=\varphi(x)$ begrenzten Fläche um die $X$Axe entstand, so wird der körperliche Inhalt desselben

$$=\pi\int_{x_1}^{x_2}\left\{\overline{f(x)}^2-\overline{\varphi(x)}^2\right\}.dx$$

Wenn $\vartheta$ den Neigungswinkel einer durch einen Punkt auf der Oberfläche des Körpers und durch die $X$Axe gelegten Ebene gegen die $XY$Ebene und $\varphi$ den Winkel bedeutet, den der radius vector desselben Punkts mit der $X$Axe macht und wenn die Oberfläche durch eine Gleichung zwischen diesen drei Polarcoordinaten $r$, $\varphi$, $\vartheta$ gegeben ist, so wird der cubische Inhalt eines körperlichen Sectors

$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{r_1}^{r_2}r^2.\sin\varphi.d\varphi\,d\vartheta.dr$$

Wenn man die Coordinaten des Schwerpunkts irgend eines geometrischen Gebildes stets durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bezeichnet, so erhält man zur

Bestimmung des Schwerpunkts der vorhin durch $\int_a^b y.dx$ ausgedrückten ebenen Fläche:

$$\xi . \int_a^b y.dx = \int_a^b xy.dx$$

$$\eta . \int_a^b y.dx = \tfrac{1}{2}\int_a^b y^2.dx$$

ferner für den Schwerpunkt der oben durch $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx$ ausgedrückten ebenen Curve:

$$\xi . \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx = \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx$$

$$\eta . \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx = \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx$$

ferner für den Schwerpunkt der oben durch

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dx$$

ausgedrückten Curve doppelter Krümmung:

$$\xi . \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dx = \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dx$$

$$\eta . \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dx = \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dy$$

$$\zeta . \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dx = \int_a^b z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} . dz$$

ferner für den Schwerpunkt der oben durch

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} . dx . dy$$

ausgedrückten krummen Oberfläche:

$$\xi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx \cdot dy$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

$$\eta \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} y \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

$$\zeta \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

für die Rotationsoberfläche, die oben durch

$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$ gegeben wurde, liegt der Schwerpunkt offenbar auf der XAxe, so dass $\eta = 0$ und $\zeta = 0$ wird und für $\xi$ die Gleichung gilt:

$$\xi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} xy \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

endlich für den Schwerpunkt des oben durch $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z \cdot dx\, dy$ ausgedrückten Körpers:

$$\xi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z \cdot dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} x\, z \cdot dx\, dy.$$

$$\eta \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z \cdot dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} y\, z \cdot dx\, dy$$

$$\zeta . \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} z . dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} z^2 . dx\, dy$$

für den oben durch $\pi \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \overline{f(x)}^2 - \overline{\varphi(x)}^2 \right\} . dx$ ausgedrückten Rotationskörper liegt der Schwerpunkt auf der XAxe, so dass $\eta = 0$ und $\zeta = 0$ wird und für $\xi$ die Gleichung gilt:

$$\xi . \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \overline{f(x)}^2 - \overline{\varphi(x)}^2 \right\} . dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \overline{f(x)}^2 - \overline{\varphi(x)}^2 \right\} . x\, dx$$

1) Es soll die Parabel in Bezug auf die hierher gehörigen Eigenschaften untersucht werden.

a) Da die Gleichung der Parabel (s. S. 125) $y^2 = 2px$ ist, so wird der zwischen zwei zu den Abscissen $x_1$ und $x_2$ gehörigen Ordinaten liegende Raum

$$\int_{x_1}^{x_2} y . dx = \frac{2}{3}(x_2 y_2 - x_1 y_1)$$

oder wenn man vom Scheitel der Parabel ausgeht bis zu einem gewissen $x$, so erhält man $\frac{2}{3}\, xy$ als den Inhalt der Fläche, die von der Axe, der Ordinate $y$ und dem Parabelbogen begrenzt wird, d. h. $\frac{2}{3}$ von dem aus $x$ und $y$ gebildeten Parallelogramms.

b) Die Länge des zugehörigen Bogens von $x_1$ bis $x_2$ wird

$$\frac{1}{2}\sqrt{4x_2^2 + 2px_2} - \frac{1}{2}\sqrt{4x_1^2 + 2px_1} + \frac{1}{4} p \log \left\{ \frac{4x_2 + p + 2\sqrt{4x_2^2 + 2px_2}}{4x_1 + p + 2\sqrt{4x_1^2 + 2px_1}} \right\}$$

Setzt man hierin $x_1 = 0$ und $x_2 = x$, so erhält man die Länge des Bogens vom Scheitel aus bis zu dem Punkt gerechnet, der zur Abscisse gehört.

c) Der Schwerpunkt der in a) genannten, vom Scheitel aus gerechneten Parabelfläche wird durch seine beiden Coordinaten gegeben: $\xi = \frac{3}{5} x$ und $\eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8} y$. Nimmt man die zu beiden Seiten der Axe liegenden Hälften der Parabelfläche zusammen, d. h. eine Fläche, die durch einen Parabelbogen und durch eine in der

Entfernung $x$ vom Scheitel auf der Axe senkrecht stehende Sehne begrenzt wird, so liegt deren Schwerpunkt natürlich auf der Axe und zwar in der Entfernung $\frac{3}{5}x$ vom Scheitel.

d) Für die Coordinaten des Schwerpunkts des von seinem Scheitel aus gerechneten Parabelbogens findet man diese Ausdrücke:

$$\xi = \frac{1}{8} \cdot \frac{2(4x+p)\sqrt{4x^2+2px} - p^2 \log\left(\frac{4x+p+2\sqrt{4x^2+2px}}{p}\right)}{2\sqrt{4x^2+2px} + p\log\left(\frac{4x+p+2\sqrt{4x^2+2px}}{p}\right)}$$

$$\eta = \frac{4}{3} \cdot \frac{(2x+p)\sqrt{2px+p^2}}{2\sqrt{4x^2+2px} + p\log\left(\frac{4x+p+2\sqrt{4x^2+2px}}{p}\right)}$$

e) Wenn man sich den Parabelbogen um die Axe der Parabel als Rotationsaxe gedreht denkt, so entsteht eine Rotationsoberfläche, welche, wenn man sie vom Scheitel aus bis zu einem gewissen Werth von $x$ rechnet, folgenden Ausdruck als ihren Flächeninhalt hat:

$$\frac{2}{3}\pi(2x+p)\sqrt{2px+p^2}$$

f) Der Schwerpunkt dieser soeben genannten Oberfläche liegt natürlich auf der Rotationsaxe und seine Entfernung vom Scheitel ist

$$= \frac{1}{5}(3x-p)$$

g) Das durch diese genannte Drehung entstandene Rotations-Paraboloid hat seinen körperlichen Inhalt $= p\pi x^2$.

h) Der Schwerpunkt dieses Paraboloids liegt natürlich wieder auf der Rotationsaxe, seine Entfernung vom Scheitel ist $= \frac{2}{3}x$.

2) Es soll die Ellipse untersucht werden.

a) Da die Gleichung der Ellipse (s. S. 125) $y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$ ist, so wird der Flächenraum, der zwischen zwei zu den Abscissen $x_1$ und $x_2$ gehörigen Ordinaten liegt:

$$= \sqrt{1-e^2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\Big\{x_2\sqrt{a^2-x_2^2} - x_1\sqrt{a^2-x_1^2}$$

$$+ a^2 \,arc\left(\sin = \frac{x_2\sqrt{a^2-x_1^2} - x_1\sqrt{a^2-x_2^2}}{a^2}\right)\Big\}$$

Setzt man $x_2 = a$ und $x_1 = 0$, so erhält man den Quadranten der Ellipse $= \frac{1}{4} a^2 \pi \sqrt{1-e^2}$, also die Fläche der ganzen Ellipse $= a^2 \pi \sqrt{1-e^2}$.

b) Die Länge des zugehörigen Bogens von $x_1$ bis $x_2$ wird

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, . \, dx$$

Setzt man hierin $x = a . \sin \varphi$, also $x_1 = a \sin \varphi_1$ und $x_2 = a \sin \varphi_2$, so wird der Bogen

$$= a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2} \, . \, d\varphi = a \left\{ E(\varphi_2) - E(\varphi_1) \right\}$$

wenn man unter $E(\varphi)$ das elliptische Integral der zweiten Gattung versteht.

c) Der Schwerpunkt der in a) genannten Fläche erhält zu seinen Coordinaten:

$$\xi = \frac{\frac{2}{3}(a^2 - x_1^2)\sqrt{a^2 - x_1^2} - \frac{2}{3}(a^2 - x_2^2)\sqrt{a^2 - x_2^2}}{x_2\sqrt{a^2 - x_2^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_2\sqrt{a^2 - x_1^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_2^2}}{a^2}\right)}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{1-e^2} . \left\{ a^2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) \right\}}{x_2\sqrt{a^2 - x_2^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_2\sqrt{a^2 - x_1^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_2^2}}{a^2}\right)}$$

Setzt man $x_2 = a$, $x_1 = 0$, so erhält man für den Schwerpunkt des elliptischen Quadranten die Coordinaten $\xi = \frac{4a}{3\pi}$, $\eta = \frac{4a\sqrt{1-e^2}}{3\pi}$.

d) Der Schwerpunkt des in b) genannten Bogens erhält zu seinen Coordinaten:

$$\xi = \frac{\sqrt{a^2 - x_2^2}\sqrt{a^2 - e^2 x_2^2} - \sqrt{a^2 - x_1^2}\sqrt{a^2 - e^2 x_1^2} + \frac{a^2(1-e^2)}{e} \log \left( \frac{e\sqrt{a^2 - x_2^2} + \sqrt{a^2 - e^2 x_2^2}}{e\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - e^2 x_1^2}} \right)}{2a \left\{ E(\varphi_2) - E(\varphi_1) \right\}}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{1-e^2}\left\{x_2\sqrt{a^2-e^2x_2^{\,2}}-x_1\sqrt{a^2-e^2x_1^{\,2}} + \frac{a^2}{e}\,arc\left(sin=\frac{ex_2\sqrt{a^2-e^2x_1^{\,2}}-ex_1\sqrt{a^2-e^2x_2^{\,2}}}{a^2}\right)\right\}}{2a\left\{E(\varphi_2)-E(\varphi_1)\right\}}$$

Setzt man hierin $x_2 = a$ und $x_1 = 0$, welchen Werthen $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_1 = 0$ entsprechen, so erhält man für den Schwerpunkt des vierten Theils des Umfangs der Ellipse:

$$\xi = \frac{\frac{a(1-e^2)}{e}\,log\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}-a}{2E'}$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\,\frac{\left\{\sqrt{1-e^2}\,\frac{1}{e}\,arc\,(sin=e)\right\}}{2E'}$$

wo unter $E'$ wie gebräuchlich das sogenannte vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung verstanden wird.

e) Der kubische Inhalt des Körpers, der durch Umdrehung der in a) genannten Fläche um die XAxe entsteht, ist

$$= \pi(1-e^2).\left\{a^2(x_2-x_1)-\tfrac{1}{3}(x_2^{\,3}-x_1^{\,3})\right\}$$

Setzt man hierin $x_2 = a$ und $x_1 = 0$, so erhält man für den kubischen Inhalt der Hälfte des Rotations-Ellipsoids:

$$\tfrac{2}{3}a^3\pi(1-e^2)$$

f) Die krumme Oberfläche des in der vorigen Nummer e) erwähnten Umdrehungskörpers ist

$$= \pi\sqrt{1-e^2}.\left\{x_2\sqrt{a^2-x_2^{\,2}}-x_1\sqrt{a^2-x_1^{\,2}} + a^2\,arc\left(sin=\frac{ex_2\sqrt{a^2-e^2x_1^{\,2}}-ex_1\sqrt{a^2-e^2x_2^{\,2}}}{a^2}\right)\right\}$$

Setzt man hierin $x_2 = a$ und $x_1 = 0$, so erhält man die Oberfläche des halben Rotations-Ellipsoids $= a^2\pi\sqrt{1-e^2}.\,arc\,(sin=e)$.

g) Der Schwerpunkt des in e) genannten Körpers liegt natürlich auf der Rotationsaxe, und seine Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten ist

$$= \frac{x_2^2(a^2 - \frac{1}{2}x_2^2) - x_1^2(a^2 - \frac{1}{2}x_1^2)}{a^2(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{(x_2 + x_1)\left\{2a^2 - x_2^2 - x_1^2\right\}}{3a^2 - x_2^2 - x_1 x_2 - x_1^2}$$

Setzt man hierin $x_2 = a$ und $x_1 = 0$, so wird die bezügliche Coordinate des Schwerpunkts des halben Rotations-Ellipsoids $= \frac{3}{8} a$.

h) Der Schwerpunkt der in f) genannten Oberfläche liegt natürlich auch auf der Rotationsaxe und seine Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten ist

$$= \frac{\frac{2}{3e^2} \cdot \left\{(a^2 - e^2 x_1^2)^{3/2} - (a^2 - e^2 x_2^2)^{3/2}\right\}}{x_2\sqrt{a^2 - x_2^2} - x_1\sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \, arc\left(sin = \frac{e x_2 \sqrt{a^2 - e^2 x_1^2} - e x_1 \sqrt{a^2 - e^2 x_2^2}}{a^2}\right)}$$

Setzt man hierin $x_2 = a$ und $x_1 = 0$, so wird die bezügliche Coordinate des Schwerpunkts der Oberfläche des halben Ellipsoids

$$= \frac{2a \cdot \left\{1 - (1 - e^2)^{3/2}\right\}}{3e^2 \, arc\,(sin = 0)}$$

3) Untersuchung der Hyperbel in der hierher gehörigen Weise.

a) Aus der Gleichung der Hyperbel (s. S. 125)

$$y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$$

ergibt sich der Flächeninhalt eines Stücks, welches zwischen den zu den Abscissen $x_1$ und $x_2$ gehörigen Ordinaten, der Abscissenaxe und dem Hyperbelbogen liegt

$$= \frac{1}{2}\sqrt{e^2 - 1}\left\{x_2\sqrt{x_2^2 - a^2} - x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2 \log\left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - a^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}\right)\right\}$$

Wenn man die Fläche vom Scheitel ab nimmt, so wird $x_1 = a$ und $x_2 =$ irgend einem $x$, mithin der Ausdruck der Fläche:

$$= \frac{1}{2}\sqrt{e^2 - 1}\left\{x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right\}$$

b) Die Länge des zwischen denselben Grenzen liegenden Bogens wird

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}} \,.\, dx$$

Da $x$ stets grösser als $a$ ist, so setzt man $x = \frac{a}{\sin\varphi}$, wodurch dieses Integral übergeht in

$$= -e \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}\sin\varphi^2}}{\sin\varphi^2} \,.\, d\varphi$$

Da die Excentricität $e$ bei der Hyperbel $>1$ ist, so wird $\frac{1}{e}$ ein echter Bruch, mithin hat $\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}\sin\varphi^2}$ die für die Untersuchung passendste Gestalt, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen gewöhnlich durch $\Delta\varphi$ bezeichnet wird. Das Integral

$= -e \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\Delta\varphi \,.\, d\varphi}{\sin\varphi^2}$ lässt sich aber so darstellen:

$$\frac{e\cos\varphi}{\sin\varphi}\Delta\varphi - \frac{e^2-1}{e}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + e\int\Delta\varphi \,.\, d\varphi \begin{bmatrix}\varphi = \varphi_2\\ \varphi = \varphi_1\end{bmatrix}$$

oder:

$$\frac{e\cos\varphi_2\,\Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2} - \frac{e^2-1}{e}F(\varphi_2) + eE(\varphi_2)$$

$$-\frac{e\cos\varphi_1\,\Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1} + \frac{e^2-1}{e}F(\varphi_1) - eE(\varphi_1)$$

wo $F$ die elliptische Funktion der ersten und $E$ die der zweiten Gattung bedeutet. Soll der Bogen der Hyperbel vom Scheitel ab gerechnet werden, so ist $x_1 = a$, $x_2 = x$ zu setzen, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = \varphi$, wodurch man die Länge des Bogens erhält:

$$= \frac{e\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi} - \frac{e^2-1}{e}F(\varphi) + eE(\varphi) + \frac{e^2-1}{e}F' - eE'$$

wenn $F'$ und $E'$ die sogenannten vollständigen Integrale der ersten und zweiten Gattung bedeuten.

c) Der Schwerpunkt der in a) genannten Fläche hat zu seinen Coordinaten

$$\xi = \frac{\frac{2}{3}\left\{(x_2^2 - a^2)^{3/2} - (x_1^2 - a^2)^{3/2}\right\}}{x_2\sqrt{x_2^2 - a^2} - x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2 \log\left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - a^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}\right)}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{e^2 - 1}\,.\left\{\frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - a^2(x_2 - x_1)\right\}}{x_2\sqrt{x_2^2 - a^2} - x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2 \log\left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - a^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}\right)}$$

Wenn es sich um den Schwerpunkt einer Fläche handelt, die vom Scheitel der Hyperbel anfängt, so darf man nur $x_1 = 0$ und $x_2 = x$ setzen.

d) Der Schwerpunkt des in b) genannten Bogens wird durch folgende Coordinaten gegeben:

$$\xi = \frac{\frac{\frac{1}{2} ae \cos\varphi_2 \Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2^2} - \frac{\frac{1}{2} a e \cos\varphi_1 \Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1^2} + \frac{1}{2}\frac{a(e^2 - 1)}{e} \log\left\{\frac{(\cos\varphi_2 + \Delta\varphi_2)\sin\varphi_1}{(\cos\varphi_1 + \Delta\varphi_1)\sin\varphi_2}\right\}}{\frac{e\cos\varphi_2 \Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2} - \frac{e\cos\varphi_1\Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1} - \frac{e^2 - 1}{e}(F[\varphi_2] - F[\varphi_1]) + e(E[\varphi_2] - E[\varphi_1])}$$

$$\eta = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{e^2 - 1}\,.\left[\frac{e\Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2^2} - \frac{e\Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1^2} - \frac{1}{e}\log\left\{\frac{(1 + \Delta\varphi_2)\sin\varphi_1}{(1 + \Delta\varphi_1)\sin\varphi_2}\right\}\right]}{\frac{e\cos\varphi_2\Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2} - \frac{e\cos\varphi_1\Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1} - \frac{e^2 - 1}{e}(F[\varphi_2] - F[\varphi_1]) + e(E[\varphi_2] - E[\varphi_1])}$$

Wenn der Bogen vom Scheitelpunkt der Hyperbel aus gerechnet wird, so ist $\varphi_2 = \varphi$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, mithin

$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi)\,.\,d\varphi = \int_0^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\,d\varphi$ und es werden alsdann die Coordinaten des Schwerpunkts:

$$\xi = \frac{\frac{\frac{1}{2} a e \cos\varphi \,\Delta\varphi}{\sin\varphi^2} + \frac{1}{2}\,\frac{a(e^2-1)}{e}\,\log\left\{\frac{e(\cos\varphi+\Delta\varphi)}{\sqrt{e^2-1}\,.\,\sin\varphi}\right\}}{\frac{e\cos\varphi\Delta\varphi}{\sin\varphi} - \frac{e^2-1}{e}(F[\varphi]-F') + e\,(E[\varphi]-E')}$$

$$\eta = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{e^2-1}\left[\frac{e\,\Delta\varphi}{\sin\varphi^2} - \frac{1}{e}\log\left\{\frac{e(1+\Delta\varphi)}{(e+\sqrt{e^2-1})\sin\varphi}\right\}\right]}{\frac{e\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi} - \frac{e^2-1}{e}(F[\varphi]-F') + e(E[\varphi]-E')}$$

e) Wenn man die in a) genannte Fläche um die XAxe dreht, so entsteht ein Rotationshyperboloid, dessen kubischer Inhalt wird

$$= \tfrac{1}{3}(e^2-1)\,\pi\left\{x_2^3 - x_1^3 - 3a^2(x_2 - x_1)\right\}$$

und wenn man vom Scheitel ausgeht:

$$= \tfrac{1}{3}(e^2-1)\,\pi\,(x^3 - 3a^2x + 2a^3)$$

f) Die krumme Oberfläche desselben Körpers wird

$$= \pi\sqrt{e^2-1}\,.\left\{x_2\sqrt{e^2x_2^2-a^2} - x_1\sqrt{e^2x_1^2-a^2} - \frac{a^2}{e}\log\left(\frac{ex_2+\sqrt{e^2x_2^2-a^2}}{ex_1+\sqrt{e^2x_1^2-a^2}}\right)\right\}$$

$$= \pi a^2\sqrt{e^2-1}\,.\left\{\frac{e\,\Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2^2} - \frac{e\,\Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1^2} - \frac{1}{e}\log\left(\frac{(1+\Delta\varphi_2)\sin\varphi_1}{(1+\Delta\varphi_1)\sin\varphi_2}\right)\right\}$$

und wenn man vom Scheitel ausgeht

$$= \pi\sqrt{e^2-1}\,.\left\{x\sqrt{e^2x^2-a^2} - a^2\sqrt{e^2-1} - \frac{a^2}{e}\log\left(\frac{ex+\sqrt{e^2x^2-a^2}}{a(e+\sqrt{e^2-1})}\right)\right\}$$

$$= \pi a^2\sqrt{1-e^2}\,.\left\{\frac{e\,\Delta\varphi}{\sin\varphi^2} - \sqrt{e^2-1} - \frac{1}{e}\log\left(\frac{e(1+\Delta\varphi)}{(e+\sqrt{e^2-1})\sin\varphi}\right)\right\}$$

g) Der Schwerpunkt des in e) erhaltenen Volumens liegt natürlich auf der Rotationsaxe und seine Coordinate wird

$$\xi = \frac{3}{2}\,\frac{x_2^4 - x_1^4 - 2a^2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2^3 - x_1^3 - 3a^2(x_2 - x_1)}$$

Wenn man vom Scheitel ausgeht, wird

$$\xi = \frac{3}{2}\,.\,\frac{(x+a)^2(x-a)}{x^2-3a^2} = \frac{3}{2}\,\frac{a\cos\varphi^2(1+\sin\varphi)}{\sin\varphi\,(1-3\sin\varphi^2)}$$

h) Der Schwerpunkt der in f) genannten Oberfläche wird ebenfalls nur durch eine einzige Coordinate gegeben:

$$\xi = \frac{\frac{2}{3e^2}\left\{(e^2x_2^2 - a^2)^{3/2} - (e^2x_1^2 - a^2)^{3/2}\right\}}{x_2\sqrt{e^2x_2^2 - a^2} - x_1\sqrt{e^2x_1^2 - a^2} - \frac{a^2}{e}\log\left(\frac{ex_2 + \sqrt{e^2x_2^2 - a^2}}{ex_1 + \sqrt{e^2x_1^2 - a^2}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}ae\sqrt{e^2-1}\,(\Delta^3\varphi_2 - \Delta^3\varphi_1)}{\frac{e\Delta\varphi_2}{\sin\varphi_2^2} - \frac{e\Delta\varphi_1}{\sin\varphi_1^2} - \frac{1}{e}\log\left(\frac{(1+\Delta\varphi_2)\sin\varphi_1}{(1+\Delta\varphi_1)\sin\varphi_2}\right)}$$

Wenn man vom Scheitel ausgeht, wird

$$\xi = \frac{\frac{2}{3e^2}\left\{(e^2x^2 - a^2)^{3/2} - a^3(e^2-1)\sqrt{e^2-1}\right\}}{x\sqrt{e^2x^2 - a^2} - a^2\sqrt{e^2-1} - \frac{a^2}{e}\log\left(\frac{ex + \sqrt{e^2x^2-a^2}}{a(e+\sqrt{e^2-1})}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}ae\sqrt{e^2-1}\left(\Delta^3\varphi - \frac{1}{e^3}(e^2-1)\sqrt{e^2-1}\right)}{\frac{e\Delta\varphi}{\sin\varphi^2} - \sqrt{e^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{e(1+\Delta\varphi)}{(e+\sqrt{e^2-1})\sin\varphi}\right)}$$

4) Untersuchung der C i s s o i d e  d e s  D i o c l e s.

Nach Seite 127 ist die Gleichung dieser Curve

$$y = \pm\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2r-x}}$$

mithin wird

a) Die Fläche, welche zwischen zwei zu den Abscissen $x_1$ und $x_2$ gehörigen Ordinaten liegt:

$$= \frac{3r+x_1}{2}\sqrt{2rx_1 - x_1^2} - \frac{3r+x_2}{2}\sqrt{2rx_2 - x_2^2}$$

$$+ \frac{3}{2}r^2\,arc\left(\sin = \frac{(x_2-r)\sqrt{2rx_1 - x_1^2} - (x_1-r)\sqrt{2rx_2 - x_2^2}}{r^2}\right)$$

Fangen wir dieses Integral von $x_1 = 0$ an und gehen bis $x_2 = 2r$, so erhalten wir für die Fläche des gesammten Raums zwischen der Curve und ihrer Asymptote, aber nur auf der e i n e n Seite der $X$Axe $= \frac{3}{2}r^2\pi$, mithin die gesammte Fläche zwischen der Curve

und ihrer Asymptote $=3r^2\pi$, d. h. das Dreifache von dem zur Construction der Cissoide erforderlichen Kreise.

b) Die Länge des zwischen denselben Ordinaten liegenden Bogens wird

$$=2r\sqrt{\frac{8r-3x_2}{2r-x_2}}-2r\sqrt{\frac{8r-3x_1}{2r-x_1}}$$
$$+r\sqrt{3}\,log\left\{\frac{(\sqrt{8r-3x_2}-\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}+\sqrt{6r-3x_1})}{(\sqrt{8r-3x_2}+\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}-\sqrt{6r-3x_1})}\right\}$$

Fängt man den Bogen vom Scheitel an zu rechnen, so wird er:

$$=2r\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}-4r+r\sqrt{3}\,log\left\{\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{8r-3x}-\sqrt{6r-3x})}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{8r-3x}+\sqrt{6r-3x})}\right\}$$

c) Für die Bestimmung des Schwerpunkts der in a) angedeuteten Fläche erhält man:

$$\xi=\frac{\begin{array}{l}\sqrt{2rx_1-x_1^2}\left(\frac{1}{3}x_1^2+\frac{5}{6}rx_1+\frac{5}{2}r^2\right)\\ \qquad-\sqrt{2rx_2-x_2^2}\left(\frac{1}{3}x_2^2+\frac{5}{6}rx_2+\frac{5}{2}r^2\right)\\ +\frac{5}{2}r^3\,arc\left(sin=\frac{(x_2-r)\sqrt{2rx_1-x_1^2}-(x_1-r)\sqrt{2rx_2-x_2^2}}{r^2}\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\frac{3r+x_1}{2}\sqrt{2rx_1-x_1^2}-\frac{3r+x_2}{2}\sqrt{2rx_2-x_2^2}\\ +\frac{3}{2}r^2\,arc\left(sin=\frac{(x_2-r)\sqrt{2rx_1-x_1^2}-(x_1-r)\sqrt{2rx_2-x_2^2}}{r^2}\right)\end{array}}$$

$$\eta=\frac{\begin{array}{l}\frac{1}{6}(x_1^3-x_2^3)+\frac{1}{2}r(x_1^2-x_2^2)+2r^2(x_1-x_2)\\ \qquad\qquad-4r^3\,log\left(\frac{2r-x_2}{2r-x_1}\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\frac{3r+x_1}{2}\sqrt{2rx_1-x_1^2}-\frac{3r+x_2}{2}\sqrt{2rx_2-x_2^2}\\ +\frac{3}{2}r^2\,arc\left(sin=\frac{(x_2-r)\sqrt{2rx_1-x_1^2}-(x_1-r)\sqrt{2rx_2-x_2^2}}{r^2}\right)\end{array}}$$

Nimmt man die ganze Fläche, welche zwischen den beiden unendlichen Aesten und der Asymptote enthalten ist, so liegt deren Schwerpunkt natürlich auf der XAxe und zwar um das Stück $\xi=2r$ vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt.

d) Zur Bestimmung des Schwerpunkts des in c) bestimmten Bogens erhält man:

$$\xi = \frac{r(2r+x_2)\sqrt{\frac{8r-3x_2}{2r-x_2}} - r(2r+x_2)\sqrt{\frac{8r-3x_1}{2r-x_1}} + r^2\sqrt{3}\,log\left\{\frac{(\sqrt{8r-3x_2}-\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}+\sqrt{6r-3x_1})}{(\sqrt{8r-3x_2}+\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}-\sqrt{6r-3x_1})}\right\}}{2r\sqrt{\frac{8r-3x_2}{2r-x_2}} - 2r\sqrt{\frac{8r-3x_1}{2r-x_1}} + r\sqrt{3}\,log\left\{\frac{(\sqrt{8r-3x_2}-\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}+\sqrt{6r-3x_1})}{(\sqrt{8r-3x_2}+\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}-\sqrt{6r-3x_1})}\right\}}$$

$$\eta = \frac{\frac{r(4r-x_2)}{2r-x_2}\sqrt{8rx_2-3x_2^2} - \frac{r(4r-x_1}{2r-x_1}\sqrt{8rx_1-3x_1^2} + \frac{8r^2}{\sqrt{3}}\,arc\left(cos = \frac{(3x_2-4r)(3x_1-4r)+3\sqrt{8rx_2-3x_2^2}\sqrt{8rx_1-3x_1^2}}{16r^2}\right)}{2r\sqrt{\frac{8r-3x_2}{2r-x_2}} - 2r\sqrt{\frac{8r-3x_1}{2r-x_1}} + r\sqrt{3}\,log\left\{\frac{(\sqrt{8r-3x_2}-\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}+\sqrt{6r-3x_1})}{(\sqrt{8r-3x_2}+\sqrt{6r-3x_2})(\sqrt{8r-3x_1}-\sqrt{6r-3x_1})}\right\}}$$

Nimmt man den gesammten Cissoiden-Bogen, also beide unendliche Aeste, so liegt der Schwerpunkt wieder auf der $X$ Axe um das Stück $\xi = 2r$ von der Spitze der Cissoide entfernt.

e) Denkt man sich das in a) genannte Stück der Fläche um die $X$ Axe gedreht, so entsteht ein Rotationskörper, dessen kubischer Inhalt wird

$$= \tfrac{1}{3}\pi(2r-x_1)(22r^2+5rx_1+x_1^2) - \tfrac{1}{3}\pi(2r-x_2)(22r_2+5rx_2+x_2^2) + 8r^3\pi\,log\left(\frac{2r-x_2}{2r-x_1}\right)$$

Rechnet man von der Spitze der Cissoide aus bis zu einer beliebigen Ordinate, so wird dieser Ausdruck:

$$= \tfrac{44}{3}r^3\pi - \tfrac{1}{3}\pi(2r-x)(22r^2+5rx+x^2) + 8r^3\pi\,log\left(\frac{2r-x}{2r}\right)$$

f) Dreht man aber die Cissoide um ihre Asymptote, so erhält man den dadurch entstandenen Körper:

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} (2r - x)^2 . dy = \tfrac{1}{3}\pi\, (3r^2 - 5r x_1 + x_1^2)\, \sqrt{2rx_1 - x_1^2}$$

$$- \tfrac{1}{3}\pi\, (3r^2 - 5r x_2 + x_2^2)\, \sqrt{2r x_2 - x_2^2}$$

$$+ r^3 \pi\, arc\left( cos = \frac{(r - x_1)(r - x_2) + \sqrt{2r x_1 - x_1^2}\sqrt{2r x_2 - x_2^2}}{r^2}\right)$$

Lässt man die gedrehte Fläche bei der XAxe anfangen, wo also $x_1 = 0$, so erhält man diesen Ausdruck:

$$= - \tfrac{1}{3}\pi (3r^2 - 5rx + x^2)\sqrt{2rx - x^2} + r^3\pi\, arc\left( cos = \frac{r - x}{r}\right).$$

Setzt man hierin $x = 2r$, so erhält man als kubischen Inhalt des Körpers, der durch Umdrehung der einen Hälfte der Cissoide um ihre Asymptote entsteht, $= r^3\pi^2$, also bei der vollständigen Cissoide natürlich das Doppelte.

g) Denkt man sich den in c) bestimmten Bogen um die XAxe gedreht, so erhält man eine krumme Oberfläche, deren Flächeninhalt wird:

$$= \frac{r\,(4r - x_2)}{2r - x_2}\sqrt{8rx_2 - 3x_2^2} - \frac{r\,(4r - x_1)}{2r - x_1}\sqrt{8rx_1 - 3x_1^2}$$

$$+ \frac{8r^3}{\sqrt{3}} arc\left( cos = \frac{(3x_1 - 4r)(3x_2 - 4r) + 3\sqrt{8rx_1 - 3x_1^2}\sqrt{8rx_2 - 3x_2^2}}{16r^2}\right)$$

Wenn man hierin $x_1 = 0$ und $x_2 = x$ setzt, so erhält man die Oberfläche, welche von der Spitze ausgeht, bis zu einem gewissen Schnitt, der mit der Asymptoten-Ebene parallel geht; sie wird:

$$= \frac{r\,(4r - x)}{2r - x)}\sqrt{8rx - 3x^2} + \frac{8r^3}{\sqrt{3}} arc\left( cos = \frac{3x - 4r}{4r}\right) - \frac{8r^3\pi}{\sqrt{3}}$$

h) Der Schwerpunkt des in e) bestimmten Rotationskörpers liegt natürlich auf der XAxe und zwar ist seine Entfernung von der Spitze

$$= \frac{\begin{array}{l}(2r - x_2)\,(\tfrac{142}{3} r^3 - \tfrac{13}{3} r^2 x_2 - \tfrac{7}{6} r x_2^2 - \tfrac{1}{4} x_2^3) \\ \quad - (2r - x_1)\,(\tfrac{142}{3} r^3 - \tfrac{13}{3} r^2 x_1 - \tfrac{7}{6} r x_1^2 - \tfrac{1}{4} x_1^3) \\ \qquad - 16 r^4 \log\left(\frac{2r - x_2}{2r - x_1}\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}(2r - x_1)(22r^2 + 5r x_1 + x_1^2) - \tfrac{1}{3}(2r - x_2)(22r^2 + 5rx_2 + x_2^2) \\ \qquad + 8r^3 \log\left(\frac{2r - x_2}{2r - x_1}\right)\end{array}}$$

i) Der Schwerpunkt des in f) gebildeten Rotationskörpers liegt offenbar auf der Asymptote und seine Entfernung von der $X$Axe wird:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}x_1^3(4r-x_1) - \frac{1}{4}x_2^3(4r-x_2)}{\frac{1}{3}(3r^2-5rx_1+x_1^2)\sqrt{2rx_1-x_1^2} - \frac{1}{3}(3r^2-5rx_2+x_2^2)\sqrt{2rx_2-x_2^2} + r^3 arc\left(\cos = \frac{(r-x_1)(r-x_2)+\sqrt{2rx_1-x_1^2}\sqrt{2rx_2-x_2^2}}{r^2}\right)}$$

Fängt man den Körper von der $XZ$Ebene an, wo $y=0$ und auch $x=0$ ist, so wird

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}x^3(4r-x)}{\frac{1}{3}(3r^2-5rx+x^2)\sqrt{2rx-x^2} + r^3 arc\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right)}$$

Setzt man hierin $y=\infty$, also $x=2r$, so erhält man für den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch die Umdrehung des einen ganzen Arms der Cissoide um ihre Asymptote entsteht: $\eta = \frac{4r}{\pi}$.

k) Der Schwerpunkt der Oberfläche, die durch Umdrehung der Cissoide um ihre Asymptote entsteht, wird:

$$\eta = \frac{\frac{(8r+3x_2)}{3}\sqrt{8rx_2-3x_2^2} - \frac{(8r+3x_1)}{3}\sqrt{8rx_1-3x_1^2} - 8r^2 \log \frac{\left\{4r-x_2+\sqrt{8rx_2-3x_2^2}\right\}(2r-x_1)}{\left\{4r-x_1+\sqrt{8rx_1-3x_1^2}\right\}(2r-x_2)} + \frac{8r^2}{3\sqrt{3}} arc\left(\cos = \frac{(3x_1-4r)(3x_2-4r)+3\sqrt{8rx_1-3x_1^2}\sqrt{8rx_2-3x_2^2}}{16r^2}\right)}{2\sqrt{(8r-3x_2)(2r-x_2)} - 2\sqrt{(8r-3x_1)(2r-x_1)} - \frac{2r}{\sqrt{3}} \log \left\{\frac{-14r+6x_2+2\sqrt{3}\sqrt{(8r-3x_2)(2r-x_2)}}{-14r+6x_1+2\sqrt{3}\sqrt{(8r-3x_1)(2r-x_1)}}\right\}}$$

Fängt die Oberfläche von der $XZ$Ebene an, so ist

$$\eta = \frac{(\tfrac{8}{3} r + x)\sqrt{8x - 3x^2} - 8r^2 \log \frac{4r - x + \sqrt{8rx - 3x^2}}{2(2r - x)} + \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} arc\left(\cos = \frac{3x - 4r}{4r}\right) - \frac{8r^3\pi}{3\sqrt{3}}}{2\sqrt{(8r - 3x)(2r - x)} - 8r - \frac{2r}{\sqrt{3}} \log \frac{-7r + 3x + \sqrt{3}\sqrt{(8r - 3x)(2r - x)}}{(-7 + 8\sqrt{3})r}}$$

5) Es soll die **Conchoide** untersucht werden.

Nach S. 131 ist die Gleichung der obern Conchoide:

$$x = \pm\left(\frac{b}{y} + 1\right)\sqrt{a^2 - y^2}$$

a) Die von der $X$ Axe, einem Curvenbogen und zwei Ordinaten $y_1$ und $y_2$ begrenzte Fläche wird: $\int_{y_1}^{y_2} y \, . \, dx$

$$= \tfrac{1}{2} y_2 \sqrt{a^2 - y_2^2} - \tfrac{1}{2} y_1 \sqrt{a^2 - y_1^2} + ab \log \left(\frac{ay_1 + y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{ay_2 + y_2\sqrt{a^2 - y_1^2}}\right) - \tfrac{1}{2} a^2 arc\left(\sin = \frac{y_2\sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2}\right)$$

Fängt man die Fläche von der $Y$ Axe an, so hat man $y_1 = a$ zu sezzen und man erhält

$$\tfrac{1}{2} y \sqrt{a - y^2} + ab \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} + \tfrac{1}{2} a^2 arc\left(\sin = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}\right)$$

b) Die von der $Y$ Axe, einem Curvenbogen und zwei zu den Ordinaten $y_1$ und $y_2$ gehörigen Abscissen begrenzte Fläche wird:

$$\int_{y_1}^{y_2} x \, . \, dy$$

$$= (b + \tfrac{1}{2} y_2)\sqrt{a^2 - y_2^2} - (b + \tfrac{1}{2} y_1)\sqrt{a^2 - y_1^2} - ab \log \left(\frac{ay_1 + y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{ay_2 + y_2\sqrt{a^2 - y_1^2}}\right) + \tfrac{1}{2} a^2 arc\left(\sin = \frac{y_2\sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2}\right)$$

Fängt man diese Fläche von dem höchsten Punkt der Conchoide an, so hat man $y_2 = a$ und $y_1 = y$ zu setzen, wodurch man erhält

$$-(b+\tfrac{1}{2}y)\sqrt{a^2-y^2} - ab\log\left(\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}a^2\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)$$

c) Die Bestimmung der Länge eines Bogens der Curve führt auf ein hyperelliptisches Integral.

d) Der Schwerpunkt der in a) bestimmten Fläche wird durch seine Coordinaten in folgender Weise gegeben:

$$\eta = \frac{\tfrac{1}{3}(a^2+\tfrac{1}{2}y_2)\sqrt{a^2-y_2^2} - \tfrac{1}{3}(a^2+\tfrac{1}{2}y_1^2)\sqrt{a^2-y_1^2} - \tfrac{1}{2}a^2b\,arc\left(sin = \frac{y_2\sqrt{a^2-y_1^2}-y_1^2\sqrt{a^2-y_2^2}}{a^2}\right)}{\tfrac{1}{2}y_2\sqrt{a^2-y_2^2} - \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{a^2-y_1^2} + ab\log\left(\frac{ay_1+y_1\sqrt{a^2-y_2^2}}{ay_2+y_2\sqrt{a^2-y_1^2}}\right) - \tfrac{1}{2}a^2\,arc\left(sin = \frac{y_2\sqrt{a^2-y_1^2}-y_1^2\sqrt{a^2-y_2^2}}{a^2}\right)}$$

$$\xi = \frac{\tfrac{1}{3}(y_1^3-y_2^3) + \tfrac{1}{2}b(y_1^2-y_2^2) - a^2b^2\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right) - a^2b\log\frac{y_2}{y_1}}{\tfrac{1}{2}y_2\sqrt{a^2-y_2^2} - \tfrac{1}{2}y_1\sqrt{a^2-y_1^2} + ab\log\left(\frac{ay_1+y_1\sqrt{a^2-y_2^2}}{ay_2+y_2\sqrt{a^2-y_1^2}}\right) - \tfrac{1}{2}a^2\,arc\left(sin = \frac{y_2\sqrt{a^2-y_1^2}-y_1^2\sqrt{a^2-y_2^2}}{a^2}\right)}$$

Fängt man die Fläche von der *Y*Axe an, so hat man $y_1 = a$ zu sezzen und es wird

$$\eta = \frac{\tfrac{1}{3}(a^2+\tfrac{1}{2}y^2)\sqrt{a^2-y^2} + \tfrac{1}{2}a^2b\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)}{\tfrac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + ab\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a} + \tfrac{1}{2}a^2\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)}$$

$$\xi = \frac{\tfrac{1}{3}(a^3-y^3) + \tfrac{1}{2}b(a^2-y^2) - a^2b^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{y}\right) - a^2b\log\frac{y}{a}}{\tfrac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + ab\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a} + \tfrac{1}{2}a^2\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right)}$$

e) Der Schwerpunkt der in b) genannten Fläche wird so g funden:

$$\eta = \frac{\frac{1}{6}(2y_2^2 + 3by_2 - 2a^2)\sqrt{a^2 - y_2^2} - \frac{1}{6}(2y_1^2 + 3by_1 - 2a^2)\sqrt{a^2 - y_1^2} + \frac{1}{2}a^2 b\, arc\left(\sin = \frac{y_2\sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1^2\sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2}\right)}{(b + \frac{1}{2}y_2)\sqrt{a^2 - y_2^2} - (b + \frac{1}{2}y_1)\sqrt{a^2 - y_1^2} - ab\log\left(\frac{ay_1 + y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{ay_2 + y_2\sqrt{a^2 - y_1^2}}\right) + \frac{1}{2}a^2 arc\left(\sin = \frac{y_2\sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2}\right)}$$

$$\xi = \frac{\frac{a^2b^2}{2y_1} - \frac{a^2b^2}{2y_2} + \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)(y_1 - y_2) + \frac{b}{2}(y_1^2 - y_2^2) + \frac{1}{6}(y_1^3 - y_2^3) + a^2 b\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{(b + \frac{1}{2}y_2)\sqrt{a^2 - y_2^2} - (b + \frac{1}{2}y_1)\sqrt{a^2 - y_1^2} - ab\log\left(\frac{ay_1 + y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{ay_2 + y_2\sqrt{a^2 - y_1^2}}\right) + \frac{1}{2}a^2 arc\left(\sin = \frac{y_2\sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2}\right)}$$

Fängt man diese Fläche von dem höchsten Punkt der Conchoide an, so hat man $y_2 = a$ und $y_1 = y$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$\eta = \frac{-\frac{1}{6}(2y^2 + 3by - 2a^2)\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2}a^2 b\, arc\left(\sin = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}\right)}{-(b + \frac{1}{2}y)\sqrt{a^2 - y^2} - ab\log\frac{y}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{1}{2}a^2 arc\left(\sin = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}\right)}$$

$$\xi = \frac{\frac{a^2b^2}{2y} + \frac{b^2 - a^2}{2}y + \frac{b}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}a(2a^2 - 3ab - 6b^2) + a^2 b\log\left(\frac{a}{y}\right)}{-(b + \frac{1}{2}y)\sqrt{a^2 - y^2} - ab\log\frac{y}{+\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{1}{2}a^2 arc\left(\sin = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}\right)}$$

f) Wenn man die in a) genannte Fläche um die XAxe dreht, so wird der kubische Inhalt des dadurch entstandenen Rotations-Körpers

$$= \tfrac{1}{3}\pi (y_2^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - y_2^2} - \tfrac{1}{3}\pi (y_1^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - y_1^2}$$
$$- \pi a^2 b \, arc\left( sin = \frac{y_2 \sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1 \sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2} \right)$$

und wenn man diesen von $x = 0$, d. h. von $y_1 = a$ anfängt, so wird er

$$= \tfrac{1}{3}\pi (y + 2a^2)\sqrt{a^2 - y^2} + \pi a^2 b \, arc\left( cos = \frac{y}{a} \right)$$

g) Wenn man die in b) genannte Fläche um die YAxe dreht, so wird der kubische Inhalt des dadurch entstandenen Körpers

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{3} y_1^3 + b y_1^2 + (b^2 - a^2) y_1 + \frac{a^2 b^2}{y_1} \right\}$$
$$- \pi \left\{ \tfrac{1}{3} y_2^3 + b y_2^2 + (b^2 - a^2) y_2 + \frac{a^2 b^2}{y_2} \right\} + 2\pi a^2 b \log \frac{y_2}{y_1}$$

und wenn man diesen von einem beliebigen $y$ bis zur Grenze der Cissoide, d. h. bis $y_2 = a$ nimmt, so wird der Inhalt

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{3} y^3 + b y^2 + (b^2 - a^2) y + \frac{a^2 b^2}{y} \right\}$$
$$- \pi a \left\{ -\tfrac{2}{3} a^2 + ab + 2b^2 \right\} + 2\pi a^2 b \log \frac{a}{y}$$

h) Der Schwerpunkt des in f) genannten Rotationskörpers liegt natürlich auf der XAxe und zwar ist seine Entfernung vom Anfangspunkt

$$= \frac{\tfrac{1}{4}(y_1^4 - y_2^4) + \tfrac{1}{3} b (y_1^3 - y_2^3) + a^2 b (y_1 - y_2) + a^2 b \log \frac{y_1}{y_2}}{\tfrac{1}{3}(y_2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - y_2^2} - \tfrac{1}{3}(y_1^2 + 2a^2)\sqrt{a_2 - y_1^2} - a^2 b \, arc\left( sin = \frac{y_2 \sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1 \sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2} \right)}$$

und wenn man die gedrehte Fläche von der YEbene, wo $y_1 = a$ ist, zu rechnen anfängt, so wird der Körper

$$= \frac{\frac{1}{4}a^4 + \frac{4}{3}a^3 b - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}by^3 - a^2 by + a^2 b^2 \log \frac{y}{a}}{\frac{1}{3}(y+2a^2)\sqrt{a^2-y^2} - a^2 b \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{y}{a}\right)}$$

i) Der Schwerpunkt des in g) genannten Rotationskörpers liegt in der $Y$Axe und seine Entfernung vom Anfangspunkt ist

$$= \frac{2a^2 b(y_2 - y_1) + \frac{a^2-b^2}{2}(y_2^2 - y_1^2) - \frac{2}{3}b(y_2^3 - y_1^3) - \frac{1}{4}(y_2^4 - y_1^4) + a^2 b^2 \log \frac{y_2}{y_1}}{\frac{1}{3}(y_1^3 - y_2^3) + b(y_1^2 - y_2^2) + (b^2 - a^2)(y_1 - y_2) + a^2 b^2\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right) + 2a^2 b \log \frac{y_2}{y_1}}$$

und indem man diesen Körper von einem Schnitt aus rechnet, der zu einem beliebigen $y$ gehört bis zur äussersten Grenze, wo $y_2 = a$ ist, so wird die $Y$Coordinate des Schwerpunkts dieses Körpers:

$$\frac{\frac{1}{4}a^4 + \frac{4}{3}a^3 b - \frac{1}{2}a^2 b^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}(a^2 - b^2)y^2 - 2a^2 by + a^2 b^2 \log \frac{a}{y}}{\frac{1}{3}y^3 + by^2 + (b^2 - a^2)y + \frac{a^2 b^2}{y} - \frac{2}{3}a^3 - a^2 b - 2ab^2 + 2a^2 b \log \frac{a}{y}}$$

6) Untersuchung der logarithmischen Linie.

Nach S. 133 ist die Gleichung der logarithmischen Linie

$$y = m . \log x \text{ oder } x = e^{\frac{y}{m}}.$$

Oder wenn man ganz difficil in Berücksichtigung der Dimensionen der einzelnen Grössen und deren Bezeichnungen sein will, was gewiss vielfach zweckmässig, aber auch häufig weitläufig und für den Denkenden überflüssig ist, so wird man die Gleichung in dieser Form wählen müssen: $y = m . \log \frac{x}{m}$ oder $x = me^{\frac{y}{m}}$.

Möge es hier geschehn. —

a) Der Flächenraum, welcher zwischen zwei zu den Abscissen $x_1$ und $x_2$ gehörigen Ordinaten, der XAxe und dem Curvenbogen liegt, wird

$$= m x_2 \log \frac{x_2}{m} - m x_1 \log \frac{x_1}{m} - m\,(x_2 - x_1)$$

Fängt man diese Fläche von dem Punkte an, wo $y = 0$, also $x_1 = m$ ist, so wird sie $= m x \log \frac{x}{m} - m x + m^2$.

b) Der Flächenraum, welcher zwischen zwei Abscissen $x_1$ und $x_2$ der Ordinaten- oder $Y$Axe und einem Curvenbogen liegt, wird

$$= m^2 \left\{ e^{\frac{y_2}{m}} - e^{\frac{y_1}{m}} \right\} = m\,(x_2 - x_1)$$

Setzt man hierin $x_1 = 0$ und $x_2 = x$, so wird der Flächenraum, der zwischen dem unendlichen Ast der Curve, der $Y$Axe, die zugleich Asymptote ist, und der Abscisse $x$ liegt, $= m x$, d. h. gleich dem doppelten Dreieck, welches von der Abscisse $x$, der zu diesem Punkt gehörigen Tangente und der $Y$Axe gebildet wird, weil die auf der $Y$Axe abgeschnittene Subtangente $= x \,.\, \frac{dy}{dx} = m$ ist.

c) Die Länge des Bogens, welcher zwischen den, in a) genannten Ordinaten liegt, wird:

$$= \sqrt{m^2 + x_2^2} - \sqrt{m^2 + x_1^2} - m \log \left( \frac{x_1 \sqrt{m^2 + x_2^2} + m x_1}{x_2 \sqrt{m^2 + x_1^2} + m x_2} \right)$$

d) Der Schwerpunkt der in a) genannten Fläche ist gegeben durch

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} m x_2 \left( \log \frac{x_2}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} m x_1 \left( \log \frac{x_1}{m} \right)^2 - m x_2 \log \frac{x_2}{m} + m x_1 \log \frac{x_1}{m} + m\,(x_2 - x_1)}{x_2 \log \frac{x_2}{m} - x_1 \log \frac{x_1}{m} - (x_2 - x_1)}$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{2} x_2^2 \log \frac{x_2}{m} - \frac{1}{2} x_1^2 \log \frac{x_1}{m} - \frac{1}{4}(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 \log \frac{x_2}{m} - x_1 \log \frac{x_1}{m} - (x_2 - x_1)}$$

und wenn man die Fläche von dem Punkt $y = 0$ annimmt, so wird $x_1 = m$ also

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} mx\left(\log\frac{x}{m}\right)^2 - mx\log\frac{x}{m} + mx - m^2}{x\log\frac{x}{m} - x + m}$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{2} x\log\frac{x}{m} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}m^2}{x\log\frac{x}{m} - x + m}$$

e) Der Schwerpunkt der in b) genannten Fläche wird

$$\eta = \frac{mx_2\log\frac{x_2}{m} - mx_1\log\frac{x_1}{m} - m(x_2 - x_1)}{m(x_2 - x_1)}$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{4}(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{4}(x_2 + x_1)$$

f) Wenn man die in a) genannte Fläche um die XAxe dreht, so wird der kubische Inhalt dieses Rotationskörpers

$$= m^2\pi x_2\left\{\left(\log\frac{x_2}{m}\right)^2 - 2\left(\log\frac{x_2}{m}\right) + 2\right\} - m^2\pi x_1\left\{\left(\log\frac{x_1}{m}\right)^2 - 2\left(\log\frac{x_1}{m}\right) + 2\right\}$$

Fängt man ihn von $y = 0$, d. h. von $x_1 = m$ an, so wird er

$$= m^2\pi x\left\{\left(\log\frac{x}{m}\right)^2 - 2\left(\log\frac{x}{m}\right) + 2\right\} - 2m^3\pi$$

und nimmt man das Integral von $x_1 = 0$ bis $x_2 = m$ (wobei zu bemerken, dass $x\log x$, für $x = 0$, selbst $= 0$ wird), so wird der Körper, der durch die Umdrehung des Curvenarms entsteht, für welchen die $Y$Axe Asymptote ist und der andrerseits durch diese umgedrehte $Y$Axe, d. h. die $YZ$Ebene, begrenzt wird $= 2m^3\pi$.

g) Der Schwerpunkt dieses so eben entwickelten Rotationskörpers wird natürlich auf der XAxe liegen und zwar

$$\xi = \frac{\frac{1}{2}x_2^2 . \left\{\left(\log\frac{x_2}{m}\right)^2 - \left(\log\frac{x_2}{m}\right) + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}x_1^2 . \left\{\left(\log\frac{x_1}{m}\right)^2 - \left(\log\frac{x_1}{m}\right) + \frac{1}{2}\right\}}{x_2\left\{\left(\log\frac{x_2}{m}\right)^2 - 2\left(\log\frac{x_2}{m}\right) + 2\right\} - x_1\left\{\left(\log\frac{x_1}{m}\right)^2 - 2\left(\log\frac{x_1}{m}\right) + 2\right\}}$$

Fängt man den Körper von $y=0$, d. h. $x_1=m$ an, so wird

$$\xi=\frac{\frac{1}{2}x^2.\left\{\left(\log\frac{x}{m}\right)^2-\left(\log\frac{x}{m}\right)+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{4}m^2}{x.\left\{\left(\log\frac{x}{m}\right)^2-2\left(\log\frac{x}{m}\right)+2\right\}-2m}$$

und endlich ergiebt sich der Schwerpunkt für den Körper, der sich von $x_1=0$ bis $x_2=m$ erstreckt $\xi=\frac{1}{8}m$.

h) Wenn man die in b) genannte Fläche um die $Y$Axe dreht, so wird der kubische Inhalt dieses Rotationskörpers

$$=\tfrac{1}{2}m\pi(x_2^2-x_1^2)$$

Setzt man hierin $x_1=0$ und $x_2=m$, so erhält man für den Körper, der durch Umdrehung desjenigen Arms der Curve um die $Y$Axe entstanden ist, für welchen diese $Y$Axe Asymptote ist, als kubischen Inhalt $\frac{1}{2}m^3\pi$. Um den Körper zu erhalten, der durch die Umdrehung eines Theils des andern Arms entsteht, setzt man $x_1=m$ und $x_2=x$, mithin wird der kubische Inhalt

$$=\tfrac{1}{2}m\pi x^2-\tfrac{1}{2}m^3\pi.$$

i) Der Schwerpunkt des so eben genannten Rotationskörpers liegt natürlich auf der $Y$Axe und zwar wird

$$\eta=\frac{mx_2^2\left\{\left(\log\frac{x_2}{m}\right)-\frac{1}{2}\right\}-mx_1^2\left\{\left(\log\frac{x_1}{m}\right)-\frac{1}{2}\right\}}{x_2^2-x_1^2}$$

Setzt man hierin $x_1=0$ und $x_2=m$, so wird der Schwerpunkt des vorhin $=\frac{1}{2}m^3\pi$ gefundenen Körpers:

$$\eta=-\tfrac{1}{2}m$$

7) Untersuchung der Kettenlinie.

Auf S. 141 *) war die Gleichung der Kettenlinie

*) Die auf genannter Seite angedeutete Lage der Coordinaten-Axen steht mit der dort angegebenen Gleichung der Kettenlinie nicht im Einklang. Der Anfangspunkt der Coordinaten muss nämlich um das Stück $m$ vertical unterhalb vom tiefsten Punkt der Kette liegend gedacht werden.

$$y = \tfrac{1}{2} m \left\{ e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right\}$$

mithin wird

a) Der Flächeninhalt eines zwischen zwei Ordinaten liegenden Stücks

$$= \tfrac{1}{2} m^2 \left\{ e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}} \right\} - \tfrac{1}{2} m^2 \left\{ e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}} \right\}$$

und wenn man vom Anfangspunkt der Coordinaten anfängt:

$$= \tfrac{1}{2} m^2 \left( e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right)$$

b) Die Länge des Bogens, der zwischen denselben Ordinaten liegt, wird

$$= \tfrac{1}{2} m \left\{ e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}} \right\} - \tfrac{1}{2} m \left\{ e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}} \right\}$$

und wenn man vom tiefsten Punkt der Kette anfängt:

$$= \tfrac{1}{2} m \left( e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right)$$

c) Der Schwerpunkt der in a) genannten Fläche hat zu seinen Coordinaten:

$$\eta = \frac{\tfrac{1}{8} \left\{ m e^{\frac{2x_2}{m}} + 4x_2 - m e^{-\frac{2x_2}{m}} \right\} - \tfrac{1}{8} \left\{ m e^{\frac{2x_1}{m}} + 4x_1 - m e^{-\frac{2x_1}{m}} \right\}}{e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}} - e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}}$$

$$\xi = \frac{(x_2 - m)\, e^{\frac{x_2}{m}} - (x_2 + m)\, e^{-\frac{x_2}{m}} - (x_1 - m)\, e^{\frac{x_1}{m}} + (x_1 + m)\, e^{-\frac{x_1}{m}}}{e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}} - e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}}$$

und wenn man vom Anfangspunkt der Coordinaten ausgeht:

$$\eta = \frac{\tfrac{1}{8} \left( m e^{\frac{2x}{m}} + 4x - m e^{-\frac{2x}{m}} \right)}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}$$

$$\xi = \frac{(x - m)\, e^{\frac{x}{m}} - (x + m)\, e^{-\frac{x}{m}} + 2m}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}$$

d) Der Schwerpunkt des in b) genannten Bogens hat zu seinen Coordinaten:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}\left(m e^{\frac{2x_2}{m}} + 4x_2 - m e^{-\frac{2x_2}{m}}\right) - \frac{1}{4}\left(m e^{\frac{2x_1}{m}} + 4x_1 - m e^{-\frac{2x_1}{m}}\right)}{e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}} - e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}}$$

$$\xi = \frac{(x_2 - m) e^{\frac{x_2}{m}} - (x_2 + m) e^{-\frac{x_2}{m}} - (x_1 - m) e^{\frac{x_1}{m}} - (x_1 + m) e^{-\frac{x_1}{m}}}{e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}} - e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}}$$

und wenn man vom tiefsten Punkt anfängt:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}\left(m e^{\frac{2x}{m}} + 4x - m e^{-\frac{2x}{m}}\right)}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}$$

$$\xi = \frac{(x - e) e^{\frac{x}{m}} - (x + m) e^{-\frac{x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}$$

e) Wenn man die in a) angegebene Fläche um die $X$Axe dreht, so wird der kubische Inhalt des dadurch entstandenen Rotationskörpers:

$$= \frac{1}{4} m^2 \pi . \left\{ \frac{m}{2} e^{\frac{2x_2}{m}} + 2x_2 - \frac{m}{2} e^{-\frac{2x_2}{m}} \right\}$$

$$- \frac{1}{4} m^2 \pi . \left\{ \frac{m}{2} e^{\frac{2x_1}{m}} + 2x_1 - \frac{m}{2} e^{-\frac{2x_1}{m}} \right\}$$

und wenn man ihn von $x = 0$ ab rechnet:

$$= \frac{1}{8} m^2 \pi \left\{ m e^{\frac{2x}{m}} + 4x - m e^{-\frac{2x}{m}} \right\}$$

oder durch die $Y$Coordinate ausgedrückt, indem man von $y = m$ anfängt:

$$= \frac{1}{2} m \pi y \sqrt{y^2 - m^2} + \frac{1}{2} m^2 \pi \log \left( \frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m} \right)$$

f) Wenn man eine Fläche, die von zwei $X$Coordinaten, einem

Curvenbogen und der $Y$Axe begrenzt ist, um die $Y$Axe dreht, so wird der kubische Inhalt des hierdurch entstandenen Rotationskörpers:

$$= m\pi\left(\tfrac{1}{2}x_2^2 + m^2\right)\left(e^{\frac{x_2}{m}} + e^{-\frac{x_2}{m}}\right) - m^2\pi x_2\left(e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}}\right)$$
$$- m\pi\left(\tfrac{1}{2}x_1^2 + m^2\right)\left(e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}\right) + m^2\pi x_1\left(e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}\right)$$

oder wenn man ihn durch die $Y$Coordinate ausdrückt und ihn von $y = m$ an rechnet,

$$= m^2\pi\, y\,.\left\{\log\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{m}\right\}^2 - 2m^2\pi\sqrt{y^2-m^2}\,.\left\{\log\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{m}\right\}$$
$$+ 2m^2\pi(y-m)$$

g) Wenn man einen Bogen der Kettenlinie um die $X$Axe dreht, so wird die Oberfläche

$$= \tfrac{1}{4}m\pi\,.\left\{m e^{\frac{2x_2}{m}} + 4x_2 - m e^{-\frac{2x_2}{m}}\right\}$$
$$- \tfrac{1}{4}m\pi\,.\left\{m e^{\frac{2x_1}{m}} + 4x_1 - m e^{-\frac{2x_1}{m}}\right\}$$

oder wenn man sie von $x_1 = 0$ an rechnet:

$$= \tfrac{1}{4}m\pi\,.\left\{m e^{\frac{2x}{m}} + 4x - m e^{-\frac{2x}{m}}\right\}$$

h) Wenn man den Bogen, der zwischen zwei $X$Coordinaten liegt, um die $Y$Axe dreht, so wird die Oberfläche

$$= m\pi x_2\left(e^{\frac{x_2}{m}} - e^{-\frac{x_2}{m}}\right) - m^2\pi\left(e^{\frac{x_2}{m}} + e^{-\frac{x_2}{m}}\right) - m\pi x_1\left(e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}\right)$$
$$+ m^2\pi\left(e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}\right)$$

oder wenn man sie durch die $Y$Coordinate ausdrückt und sie von $y = m$ an rechnet,

$$= 2m\pi\sqrt{y^2-m^2}\,\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{m}\right) - 2m\pi(y-m)$$

i) Der Schwerpunkt des in e) genannten Rotationskörpers liegt auf der $X$Axe und seine Coordinate wird, wenn man der Einfachheit wegen von $x = 0$ anfängt:

$$\xi = \frac{2x^2 + mx\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right) - \frac{m^2}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2}{4x + m\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right)}$$

oder wenn man den Ausdruck durch die *Y* Coordinate wählt und dann von $y = m$ anfängt:

$$\xi = \frac{\left\{my\sqrt{y^2 - m^2} + \tfrac{1}{2}m^3 \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right)\right\} . \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) + \tfrac{1}{2}m(m^2 - y^2)}{y\sqrt{y^2 - m^2} + m^2 \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right)}$$

k) Der Schwerpunkt des in f) genannten Rotationskörpers liegt auf der *Y* Axe und seine Coordinate wird, wenn man sie gleich durch die *Y* Coordinate ausdrückt und bei $y = m$ anfängt:

$$\eta = \frac{\log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) . \left\{\tfrac{1}{4}(2y^2 - m^2) \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) - \tfrac{1}{2}y\sqrt{y^2 - m^2}\right\} + \tfrac{1}{4}(y^2 - m^2)}{\log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) . \left\{y \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) - 2\sqrt{y^2 - m^2}\right\} + 2(y - m)}$$

l) Der Schwerpunkt der in g) genannten Rotationsoberfläche liegt auf der *X* Axe und seine Coordinate wird:

$$\xi = \frac{m\left\{\left(x_2 - \frac{m}{2}\right)e^{\frac{2x_2}{m}} - \left(x_2 + \frac{m}{2}\right)e^{-\frac{2x_2}{m}} + 2x_2^2\right\} - m\left\{\left(x_1 - \frac{m}{2}\right)e^{\frac{2x_1}{m}} - \left(x_1 + \frac{m}{2}\right)e^{-\frac{2x_1}{m}} + 2x_1^2\right\}}{\left\{me^{\frac{2x_2}{m}} + 4x_2 - me^{-\frac{2x_2}{m}}\right\} - \left\{me^{\frac{2x_1}{m}} + 4x_1 - me^{-\frac{2x_1}{m}}\right\}}$$

oder wenn man die Oberfläche von $x_1 = 0$ anfängt:

$$\xi = \frac{m\left\{\left(x - \frac{m}{2}\right)e^{\frac{2x}{m}} - \left(x + \frac{m}{2}\right)e^{-\frac{2x}{m}} + 2x^2 + m\right\}}{me^{\frac{2x}{m}} + 4x - me^{-\frac{2x}{m}}}$$

m) Der Schwerpunkt der in h) genannten Rotationsoberfläche liegt auf der $Y$ Axe und seine Coordinate wird, wenn man gleich die Oberfläche von $y=m$ anfängt:

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}y\sqrt{y^2-m^2}\,log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{m}\right)-\frac{1}{4}(y^2-m^2)}{\sqrt{y^2-m^2}\,.\,log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{m}\right)-(y-m)}$$

8) Untersuchung der gewöhnlichen Cycloide.

Wenn man die Gleichung der Cycloide (S. 128) in der gebräuchlichsten Gestalt schreibt, indem man die Gerade, auf welcher der Kreis rollt, nicht wie dort die darauf Senkrechte zur $X$ Axe wählt, so wird sie

$$x=r\,.\,arc\left(cos=\frac{r-y}{r}\right)-\sqrt{2ry-y^2}$$

oder als Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}$$

a) Der Flächeninhalt eines Stücks, welches zwischen zwei Ordinaten $y_1$ und $y_2$ liegt und von dem zwischenliegenden Cycloiden-Bogen und der Abscissenaxe begrenzt ist, wird:

$$=-\frac{3r+y_2}{2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}+\frac{3r+y_1}{2}\sqrt{2ry_1-y_1^2}$$

$$+\frac{3}{2}r^2\,arc\left(cos=\frac{(r-y_1)(r-y_2)+\sqrt{2ry_1-y_1^2}\,\sqrt{2ry_2-y_2^2}}{r^2}\right)$$

und fängt man die Fläche vom Anfangspunkt der Coordinaten, also von $y_1=0$ an, so wird sie

$$=-\frac{3r+y}{2}\sqrt{2ry-y^2}+\frac{3}{2}r^2\,arc\left(cos=\frac{r-y}{r}\right).$$

Wenn man die Fläche von $y_1=0$ bis $y_2=2r$ nimmt, so erhält man $\frac{3}{2}r^2\pi$ als halbe cycloidische Fläche oder $3r^2\pi$ für den ganzen Raum, der bei einer vollständigen Umwälzung des Kreises erzeugt wird. — Der Raum, der von einer durch den höchsten Punkt der Cycloide mit der $X$ Axe parallel gezogenen Linie, durch die Cycloide und durch

zwei in den äussersten Endpunkten errichteten Ordinaten begrenzt ist, wird $=r^2\pi$.

b) Die Länge des zwischen denselben Ordinaten liegenden Bogens wird

$$= 2\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_1} - 2\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_2}$$

und nimmt man dieses von $y_1=0$ bis $y_2=2r$, so wird die Länge der halben Cycloide $=4r$, also die ganze Länge, welche bei einer vollständigen Umwälzung erzeugt wird, $=8r$.

c) Die Coordinaten des Schwerpunkts der in a) genannten Fläche werden:

$$\eta = \frac{\left\{\frac{1}{3}y_1^2+\frac{5}{6}ry_1+\frac{5}{2}r^2\right\}\sqrt{2ry_1-y_1^2}-\left\{\frac{1}{3}y_2^2+\frac{5}{6}ry_2+\frac{5}{2}r^2\right\}\sqrt{2ry_2-y_2^2}+\frac{5}{2}r^3\,arc\left(\cos=\frac{(r-y_1)(r-y_2)+\sqrt{2ry_1-y_1^2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}}{r^2}\right)}{(3r+y_1)\sqrt{2ry_1-y_1^2}-(3r+y_2)\sqrt{2ry_2-y_2^2}+3r^2\,arc\left(\cos=\frac{(r-y_1)(r-y_2)+\sqrt{2ry_1-y_1^2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}}{r^2}\right)}$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{3}y_1^3-\frac{1}{4}ry_1^2-\frac{3}{2}r^2y_1-\frac{1}{3}y_2^3+\frac{1}{4}ry_2^2+\frac{3}{2}r^2y_2+\frac{r(3r+y_1)}{2}\sqrt{2ry_1-y_1^2}\,arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)-\frac{r(3r+y_2)}{2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}\,arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)-\frac{3}{4}r^3\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right\}^2+\frac{3}{4}r^3\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\right\}^2}{\frac{3r+y_1}{2}\sqrt{2ry_1-y_1^2}-\frac{3r+y_2}{2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}+\frac{3}{2}r^2\,arc\left(\cos=\frac{(r-y_1)(r-y_2)+\sqrt{2ry_1-y_1^2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}}{r^2}\right)}$$

Wenn man die ganze Hälfte der Cycloidenfläche nimmt, also $y_1=0$ und $y_2=2r$ setzt, wird $\eta=\frac{5}{6}r$ und $\xi=\frac{8r}{9\pi}+\frac{1}{2}r\pi$. Will man die ganze Fläche haben, so ist zwar für beide Grenzen die Ordinate $=0$,

d. h. sowohl $y_1=0$ als auch $y_2=0$, dagegen wird $arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)=0$ und $arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)=2\pi$, mithin erhält man als Coordinaten des Schwerpunkts:

$$\eta=\tfrac{5}{3}r \text{ und } \xi=r\pi.$$

d) Die Coordinaten des Schwerpunkts des in b) genannten Bogens werden:

$$\eta=\frac{\frac{1}{3}(4r+y_1)\sqrt{2r-y_1}-\frac{1}{3}(4r+y_2)\sqrt{2r-y_2}}{\sqrt{2r-y_1}-\sqrt{2r-y_2}}$$

$$\xi=\frac{r\sqrt{2r-y_1}\,arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)-(2r-\frac{1}{3}y_1)\sqrt{y_1}-r\sqrt{2r-y_2}\,arc\left(cos\frac{r-y_2}{r}\right)+(2r-\frac{1}{3}y_2)\sqrt{y_2}}{\sqrt{2r-y_1}-\sqrt{2r-y_2}}$$

Nimmt man den Bogen vom Anfangspunkt bis zum höchsten Punkt der Cycloide, so werden die Schwerpunktscoordinaten dieses Bogens: $\eta=\frac{4}{3}r$, $\xi=\frac{4}{3}r$.

e) Wenn man die in a) genannte Fläche um die XAxe dreht, so entsteht ein Körper, dessen kubischer Inhalt ist:

$$=\pi\left\{\tfrac{1}{3}y_1^2+\tfrac{5}{6}ry_1+\tfrac{5}{2}r^2\right\}\sqrt{2ry_1-y_1^2}$$
$$-\pi\left\{\tfrac{1}{3}y_2^2+\tfrac{5}{6}ry_2+\tfrac{5}{2}r^2\right\}\sqrt{2ry_2-y_2^2}$$
$$+\tfrac{5}{2}r^3\pi\,arc\left(cos=\frac{(r-y_1)(r-y_2)-\sqrt{2ry_1-y_1^2}\sqrt{2ry_2-y_2^2}}{r^2}\right)$$

Nimmt man diesen Körper von $y_1=0$ bis $y_2=2r$, so wird der kubische Inhalt des durch die Umdrehung der halben Cycloide um die XAxe entstandenen Umdrehungskörpers $=\frac{5}{2}r^3\pi^2$.

f) Wenn der in b) genannte Bogen um die XAxe gedreht wird, so wird die krumme Oberfläche des dadurch entstandenen Rotationskörpers

$$=\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_1}\,.\,(4r+y_1)-\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_2}\,.\,(4r-y_2)$$

oder wenn man diese Fläche von $y_1=0$ bis $y_2=2r$ nimmt, so wird die Umdrehungsoberfläche der halben Cycloide $=\frac{32}{3}\pi r^2$.

g) Der auf der XAxe liegende Schwerpunkt des in e) erwähnten Rotationskörpers hat zu seiner Coordinate

$$\xi = \frac{\begin{array}{l}\frac{5}{2}r^3(y_2-y_1)+\frac{5}{12}r^2(y_2{}^2-y_1{}^2)+\frac{1}{9}r(y_2{}^3-y_1{}^3)-\frac{1}{4}(y_2{}^4-y_1{}^4) \\ -r(\frac{1}{3}y_2{}^2+\frac{5}{6}ry_2+\frac{5}{2}r^2)\sqrt{2ry_2-y_2{}^2}\,.\,arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right) \\ +r(\frac{1}{3}y_1{}^2+\frac{5}{6}ry_1+\frac{5}{2}r^2)\sqrt{2ry_1-y_1{}^2}\,.\,arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right) \\ +\frac{5}{4}r^4\left[arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\right]^2-\frac{5}{4}r^4\left[arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right]^2\end{array}}{\begin{array}{l}(\frac{1}{3}y_1{}^2+\frac{5}{6}ry_1+\frac{5}{2}r^2)\sqrt{2ry_1-y_1{}^2} \\ -(\frac{1}{3}y_2{}^2+\frac{5}{6}ry_2+\frac{5}{2}r^2)\sqrt{2ry_2-y_2{}^2} \\ +\frac{5}{2}r^3 arc\left(cos=\frac{(r-y_1)(r-y_2)+\sqrt{2ry_1-y_1{}^2}\sqrt{2ry_2-y_2{}^2}}{r^2}\right)\end{array}}$$

Nimmt man den Körper von $y_1=0$ bis $y_2=2r$, so wird die Coordinate des Schwerpunkts $=\frac{1}{2}r+\frac{28r}{45\pi}$.

h) Der auf der XAxe liegende Schwerpunkt der in f) erwähnten Rotationsoberfläche hat zu seiner Coordinate:

$$\xi = \frac{\begin{array}{l}\sqrt{y_2}\left\{8r^2+\frac{2}{3}ry_2-\frac{3}{5}y_2{}^2\right\}-\sqrt{y_1}\left\{8r^2+\frac{2}{3}ry_1-\frac{3}{5}y_1{}^2\right\} \\ -r(4r+y_2)\sqrt{2r-y_2}\,arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right) \\ +r(4r+y_1)\sqrt{2r-y_1}\,arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\end{array}}{(4r+y_1)\sqrt{2r-y_1}-(4r-y_2)\sqrt{2r-y_2}}$$

Wenn man diese Oberfläche von $y_1=0$ bis $y_2=2r$ nimmt, so wird die Schwerpunktscoordinate $=\frac{26}{15}r+\pi r$.

i) Wenn man eine Fläche, die von zwei Abscissen $x_1$ und $x_2$, von einem Cycloidenbogen und von der YAxe begrenzt wird, um die YAxe dreht, so wird der kubische Inhalt des dadurch entstandenen Rotationskörpers:

$$=r^2\pi(y_2-\tfrac{3}{2}r)\,.\left\{arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\right\}^2$$

$$+r\pi(3r-y_2)\sqrt{2ry_2-y_2{}^2}\,.\,arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)$$

$$-\pi y_2(9r^2-\tfrac{3}{2}ry_2+\tfrac{1}{3}y_2^2)-r^2\pi(y_1-\tfrac{3}{2}r).\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right\}^2$$

$$+r\pi(3r-y_1)\sqrt{2ry_1-y_1^2}.arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)$$

$$-\pi y_1(9r^2-\tfrac{3}{2}ry_1+\tfrac{1}{3}y_1^2)$$

und wenn man die gedrehte Fläche von $y_1=0$ bis $y_2=2r$ nimmt,

$$=(\tfrac{1}{2}\pi^3-\tfrac{28}{3})r^3.$$

k) Die krumme Oberfläche des in der vorigen Nummer i) genannten Rotationskörpers wird

$$=4\pi\sqrt{2r}\left\{-r\sqrt{2r-y_2}\cdot arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)+(2r-\tfrac{1}{3}y_2)\sqrt{y_2}\right\}$$

$$-4\pi\sqrt{2r}\left\{-r\sqrt{2r-y_1}\cdot arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)+(2r-\tfrac{1}{3}y_1)\sqrt{y_1}\right\}$$

und wenn man dieses wieder von $y_1=0$ bis $y_2=2r$ nimmt, $=\frac{32}{3}r^2\pi$.

l) Der Schwerpunkt des in i) genannten Rotationskörpers liegt natürlich auf der $Y$ Axe und seine Coordinate wird

$$\eta=\frac{\begin{array}{l}\tfrac{1}{4}r^2(2y_2^2-5r^2).\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\right\}^2\\ +\tfrac{1}{6}r(15r^2+5ry_2-4y_2^2)\sqrt{2ry_2-y_2^2}.arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\\ -\tfrac{5}{2}r^3y_2-\tfrac{5}{12}r^2y_2^2+\tfrac{8}{9}ry_2^3-\tfrac{1}{4}y_2^4\\ -\tfrac{1}{4}r^2(2y_1^2-5r^2).\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right\}^2\\ -\tfrac{1}{6}r(15r^2+5ry_1-4y_1^2)\sqrt{2ry_1-y_1^2}.arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\\ +\tfrac{5}{2}r^3y_1+\tfrac{5}{12}r^2y_1^2-\tfrac{8}{9}ry_1^3+\tfrac{1}{4}\end{array}}{\begin{array}{l}r^2(y_2-\tfrac{3}{2}r).\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\right\}^2\\ +r(3r-y_2)\sqrt{2ry_2-y_2^2}.arc\left(\cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\\ -y_2(9r^2-\tfrac{3}{2}ry_2+\tfrac{1}{3}y_2^2)-r^2(y_1-\tfrac{3}{2}r).\left\{arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right.\\ -r(3r-y_1)\sqrt{2ry_1-y_1^2}.arc\left(\cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\\ +y_1(9r^2-\tfrac{3}{2}ry_1+\end{array}}$$

und wenn man den Körper von $y_1 = 0$ bis $y_2 = 2r$ nimmt, wird

$$\eta = \frac{(27\pi^3 - 128)\, r}{18\pi^3 - 336}$$

m) Der Schwerpunkt der in k) genannten Oberfläche hat zu seiner $Y$ Coordinate:

$$\eta = \frac{\begin{array}{l} (\frac{8}{3} r^2 + \frac{2}{9} r y_2 - \frac{1}{2} y_2^2) \sqrt{y_2} \\ - \frac{1}{3} r (4r + y_2) \sqrt{2r - y_2} \,.\, arc\left( cos = \frac{r - y}{r} \right) \\ - (\frac{8}{3} r^2 + \frac{2}{9} r y_1 - \frac{1}{5} y_1^2) \sqrt{y_1} \\ \qquad + \frac{1}{3} r (4r + y_1) \sqrt{2r - y_1} \,.\, arc\left( cos = \frac{r - y_1}{r} \right) \end{array}}{\begin{array}{l} (2r - \frac{1}{3} y_2) \sqrt{y_2} - r \sqrt{2r - y_2} \,.\, arc\left( cos = \frac{r - y_2}{r} \right) \\ \qquad - (2r - \frac{1}{3} y_1) \sqrt{y_1} + r \sqrt{2r - y_1} \,.\, arc\left( cos = \frac{r - y_1}{r} \right) \end{array}}$$

und wenn man hier wieder von $y_1 = 0$ bis $y_2 = 2r$ rechnet:

$$\eta = \frac{26}{15} r.$$

n) Wenn man sich in der Mitte der Cycloide eine Linie parallel mit der $Y$ Axe gezogen denkt und diese zur Drehungsaxe annimmt, wenn man ferner von zwei Punkten der Cycloide, deren Ordinaten $y_1$ und $y_2$ sind, Linien parallel mit der $X$ Axe bis zur Drehungsaxe zieht und darauf die von diesen Linien und von dem Curvenbogen begrenzte Figur rotiren lässt, so wird der kubische Inhalt des dadurch entstandenen Körpers:

$$\begin{array}{l} = r^2\pi (y_2 - \frac{3}{2} r) \left\{ arc\left( cos = \frac{r - y_2}{r} \right) \right\}^2 + r\pi \Big\{ 3 r^2 \pi - 2 r \pi y_2 \\ + (3r - y_2) \sqrt{2 r y_2 - y_2^2} \Big\} arc\left( cos = \frac{r - y_2}{r} \right) \\ - r\pi^2 (3r - y_2) \sqrt{2 r y_2 - y_2^2} - \pi y_2 (9 r^2 - \pi^2 r^2 - \frac{3}{2} r y_2 + \frac{1}{3} y_2^2) \\ - r^2 \pi (y_1 - \frac{3}{2} r) \left\{ arc\left( cos = \frac{r - y_1}{r} \right) \right\}^2 - r\pi \Big\{ 3 r^2 \pi - 2 r \pi y_1 \\ + (3r - y_1) \sqrt{2 r y_1 - y_1^2} \Big\} arc\left( cos = \frac{r - y_1}{r} \right) \\ + r\pi^2 (3r - y_1) \sqrt{2 r y_1 - y_1^2} + \pi y_1 (9 r^2 - \pi^2 r^2 - \frac{3}{2} r y_1 + \frac{1}{3} y_1^2) \end{array}$$

Nimmt man die ganze Hälfte der Cycloide als gedrehte Fläche an, so wird der Inhalt des Rotationskörpers

$$= 4r^3\pi . \left\{ \tfrac{1}{2}\pi^2 - \tfrac{1}{3} \right\}$$

o) Die krumme Oberfläche des in der vorigen Nummer genannten Rotationskörpers wird

$$= 4r\pi^2\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_1} + 4\pi(2r-\tfrac{1}{3}y_1)\sqrt{2ry_1}$$
$$-4r\pi\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_1} . arc\left(cos = \frac{r-y_1}{r}\right)$$
$$-4r\pi^2\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_2} - 4\pi(2r-\tfrac{1}{3}y_2)\sqrt{2ry_2}$$
$$+4r\pi\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_2} . arc\left(cos = \frac{r-y_2}{r}\right)$$

oder wenn man den rotirenden Bogen von $y_1 = 0$ bis $y_2 = 2r$ nimmt,

$$= 8r^2\pi(\pi - \tfrac{4}{3})$$

p) Der Schwerpunkt des in n) genannten Rotationskörpers liegt natürlich auf der eben dort gewählten Rotationsaxe und seine Entfernung von der XAxe wird:

$$\eta = \frac{\begin{matrix} \tfrac{1}{4}r^2(2y_2^2-5r^2).\left\{arc\left(cos = \frac{r-y_2}{r}\right)\right\}^2 + \left\{\tfrac{1}{6}r(15r^2 \\ +5ry_2-4y_2^2)\sqrt{2ry_2-y_2^2} \\ +r^2\pi(\tfrac{5}{2}r^2-y_2^2)\right\}.arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)+\tfrac{1}{2}\pi^2r^2y_2^2 \\ +\pi ry_2^2\sqrt{2ry_2-y_2^2}-\tfrac{5}{2}r^3y_2-\tfrac{5}{12}r^2y_2^2+\tfrac{8}{9}ry_2^3-\tfrac{1}{4}y_2^4 \\ -\tfrac{1}{4}r^2(2y_1^2-5r^2).\left\{arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right\}^2-\left\{\tfrac{1}{6}r(15r^2 \\ +5ry_1-4y_1^2)\sqrt{2ry_1-y_1^2}-r^2\pi(\tfrac{5}{2}r^2-y_1^2)\right\}.arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right) \\ -\tfrac{1}{2}\pi^2r^2y_1^2-\pi ry_1^2\sqrt{2ry_1-y_1^2}+\tfrac{5}{2}r^3y_1+\tfrac{5}{12}r^2y_1^2 \\ -\tfrac{8}{9}ry_1^3+\tfrac{1}{4}y_1^4\end{matrix}}{\begin{matrix} r^2(y_2-\tfrac{3}{2}r).\left\{arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\right\}^2+r.\left\{3r^2\pi-2r\pi y_2 \\ +(3r-y_2)\sqrt{2ry_2-y_2^2}\right\}.arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right) \\ -r\pi(3r-y_2)\sqrt{2ry_2-y_2^2}-y_2(9r^2-\pi^2r^2-\tfrac{3}{2}ry_2+\tfrac{1}{3}y_2^2)\end{matrix}}$$

$$-r^2(y_1-\tfrac{3}{2}r).\left\{arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\right\}^2-r.\left\{3r^2\pi-2r\pi y_1\right.$$

$$\left.+(3r-y_1)\sqrt{2ry_1-y_1{}^2}\right\}.arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)$$

$$+r\pi(3r-y_1)\sqrt{2ry_1-y_1{}^2}+y_1(9r^2-\pi^2r^2-\tfrac{3}{2}ry_1+\tfrac{1}{3}y_1{}^2)$$

Nimmt man die ganze Hälfte der Cycloide als gedrehte Fläche an, so wird die Entfernung des Schwerpunkts des Rotationskörpers von der XAxe:

$$=\frac{(45\pi^2-128).r}{24(3\pi^2-2)}$$

q) Der Schwerpunkt der in o) genannten krummen Oberfläche hat zu seiner Entfernung von der XAxe:

$$\eta=\frac{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}\pi r\sqrt{2r}(4r+y_1)\sqrt{2r-y_1}+\tfrac{1}{3}\sqrt{2ry_1}(8r^2+\tfrac{2}{3}ry_1-\tfrac{3}{5}y_1{}^2)\\ -\tfrac{1}{3}\sqrt{2r}(4r+y_1)\sqrt{2r-y_1}.arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\\ -\tfrac{1}{3}\pi r\sqrt{2r}(4r+y_2)\sqrt{2r-y_2}-\tfrac{1}{3}\sqrt{2ry_2}(8r^2+\tfrac{2}{3}ry_2-\tfrac{3}{5}y_2{}^2)\\ +\tfrac{1}{3}\sqrt{2r}(4r+y_2)\sqrt{2r-y_2}.arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\pi r\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_1}+(2r-\tfrac{1}{3}y_1)\sqrt{2ry_1}\\ -r\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_1}.arc\left(cos=\frac{r-y_1}{r}\right)\\ -\pi r\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_2}-(2r-\tfrac{1}{3}y_2)\sqrt{2ry_2}\\ \qquad+r\sqrt{2r}\sqrt{2r-y_2}.arc\left(cos=\frac{r-y_2}{r}\right)\end{array}}$$

und wenn man den vorliegenden Bogen von $y_1=0$ bis $y_2=2r$ nimmt:

$$=\frac{(15\pi-26)r}{15(3\pi-4)}$$

9) Untersuchung der Epicycloide.

Die Gleichung der Epicycloide ist (s. S. 144) durch zwei Gleichungen gegeben, welche $x$ und $y$ als Funktionen der Amplitudo $\varphi$ ausdrücken:

$$x=(r+\varrho)\cos\varphi-\varrho\cos\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi$$

$$y=(r+\varrho)\sin\varphi-\varrho\sin\left(\frac{r}{\varrho}+1\right)\varphi$$

a) Der Flächeninhalt einer Fläche, die zwischen zwei X Coordinaten, der Ordinaten-Axe und dem Curvenbogen liegt, wird, wenn $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die zu den Endpunkten des Bogens gehörigen Werthe von $\varphi$ sind:

$$=(r+\varrho)\cdot\left\{\frac{r+2\varrho}{2}(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{r+\varrho}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right.$$

$$-\frac{(r+2\varrho)\varrho}{2r}\cdot\left(\sin\frac{r}{\varrho}\varphi_2-\sin\frac{r}{\varrho}\varphi_1\right)$$

$$-\frac{\varrho}{2}\left[\sin\left(\frac{r}{\varrho}+2\right)\varphi_2-\sin\left(\frac{r}{\varrho}+2\right)\varphi_1\right]$$

$$\left.+\frac{\varrho^2}{r(r+\varrho)}\left[\sin\left(\frac{2r}{\varrho}+2\right)\varphi_2-\sin\left(\frac{2r}{\varrho}+2\right)\varphi_1\right]\right\}$$

Setzt man hierin $\varrho=r$, so wird die Curve bekanntlich die Cardioide.

Die genannte Fläche wird dann

$$=r^2.\left\{3(\varphi_2-\varphi_1)-3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)+(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right.$$

$$\left.-(\sin 3\varphi_2-\sin 3\varphi_1)+\tfrac{1}{4}(\sin 4\varphi_2-\sin 4\varphi_1)\right\}$$

Nimmt man diese Fläche von $\varphi_1=0$ bis $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, so wird sie $=(\frac{3}{2}\pi-2)r^2$ und zieht man hiervon $2r^2$ ab, so wird die durch eine in der Entfernung $r$ errichtete Ordinate abgeschnittene Fläche $=(\frac{3}{2}\pi-4)r^2$. Der übrige Theil der halben Cycloide wird erhalten, wenn man $\int y.dx$ zwischen den Grenzen $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi=\pi$ nimmt, welches ist $=(\frac{3}{2}\pi+4)r^2$. Hiernach wird die Hälfte der Cardioidenfläche $=3r^2\pi$ und folglich die ganze Fläche $=6r^2\pi$.

b) Die Länge des zwischen den vorhin genannten Grenzen liegenden Bogens wird:

$$=\frac{4\varrho}{r}(r+\varrho)\left(\cos\frac{r}{2\varrho}\varphi_1-\cos\frac{r}{2\varrho}\cdot\varphi_2\right)$$

Nimmt man dieses von $\varphi_1=0$ bis $\varphi_2=\varphi$, so erhält man:

$$\frac{4\varrho}{r}(r+\varrho)\left(1-\cos\frac{r}{2\varrho}\varphi\right).$$

Setzt man $\varrho=r$, so wird der Bogen der Cardioide:

$$=8r\left(\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1-\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2\right)$$

Dieser von $\varphi_1=0$ bis $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ genommen giebt $=8r\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$ und von $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi_2=\pi$, $=8r.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; mithin wird der halbe Umfang der Cardioide $=8r$, mithin die gesammte Peripherie $=16r$.

c) Der Schwerpunkt der in a) genannten Cardioidenfläche wird:

$$\eta=\frac{r\left\{4(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\frac{5}{4}(\cos2\varphi_1-\cos2\varphi_2)+\frac{5}{6}(\cos3\varphi_1-\cos3\varphi_2)-(\cos4\varphi_1-\cos4\varphi_2)+\frac{1}{2}(\cos5\varphi_1-\cos5\varphi_2)-\frac{1}{12}(\cos6\varphi_1-\cos6\varphi_2)\right\}}{3(\varphi_2-\varphi_1)-3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)+(\sin2\varphi_2-\sin2\varphi_1)-(\sin3\varphi_2-\sin3\varphi_1)+\frac{1}{4}(\sin4\varphi_2-\sin4\varphi_1)}$$

$$\xi=\frac{r\left\{2(\varphi_1-\varphi_2)-\frac{11}{2}(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)+\frac{19}{8}(\sin2\varphi_1-\sin2\varphi_2)-\frac{3}{4}(\sin3\varphi_1-\sin3\varphi_2)+\frac{1}{2}(\sin4\varphi_1-\sin4\varphi_2)-\frac{1}{4}(\sin5\varphi_1-\sin5\varphi_2)+\frac{1}{24}(\sin6\varphi_1-6\varphi_2)\right\}}{3(\varphi_2-\varphi_1)-3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)+(\sin2\varphi_2-\sin2\varphi_1)-(\sin3\varphi_2-\sin3\varphi_1)+\frac{1}{4}(\sin4\varphi_2-\sin4\varphi_1)}$$

Der Schwerpunkt der ganzen Cardioide liegt auf der XAxe und zwar um $\frac{2}{3}r$ nach der negativen Seite hin vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt.

d) Der Schwerpunkt des in b) genannten Bogens wird gegeben:

$$\eta=\frac{\left\{(\sin\frac{1}{2}\varphi_1-\sin\frac{1}{2}\varphi_2)-\frac{1}{2}(\sin\frac{3}{2}\varphi_1-\sin\frac{3}{2}\varphi_2)+\frac{1}{10}(\sin\frac{5}{2}\varphi_1-\sin\frac{5}{2}\varphi_2)\right\}.r}{\cos\frac{1}{2}\varphi_1-\cos\frac{1}{2}\varphi_2}$$

$$\xi=\frac{\left\{(\cos\frac{1}{2}\varphi_1-\cos\frac{1}{2}\varphi_2)-\frac{1}{2}(\cos\frac{3}{2}\varphi_1-\cos\frac{3}{2}\varphi_2)+\frac{1}{10}(\cos\frac{5}{2}\varphi_1-\cos\frac{5}{2}\varphi_2)\right\}.r}{\cos\frac{1}{2}\varphi_1-\cos\frac{1}{2}\varphi_2}$$

Nimmt man die ganze Hälfte der Curve, d. h. nimmt man die Ausdrücke von $\varphi_1=0$ bis $\varphi_1=\pi$, so wird

$$\eta=\tfrac{8}{5}r \text{ und } \xi=-\tfrac{3}{5}r.$$

e) Wenn man denjenigen Flächentheil der Cardioide, welcher zwischen einer in dem um $r$ vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernten Punkt der Abscissenaxe errichteten Ordinate und der als Tangente auftretenden Grenzordinate liegt, um die XAxe dreht, so muss man die rotirte Fläche als von beiden folgenden Curven begrenzt betrachten:

$$y = \sqrt{3r^2 - x^2 + 2r\sqrt{3r^2 - 2rx}} = \varphi(x)$$

und

$$y = \sqrt{3r^2 - x^2 - 2r\sqrt{3r^2 - 2rx}} = \psi(x).$$

Dann wird der entstandene Rotationskörper

$$= \pi \int_r^{3/2 r} \left\{ \overline{\varphi(x)}^2 - \overline{\psi(x)}^2 \right\} dx = \tfrac{4}{3} r^3 \pi$$

Der andere Theil des Rotationskörpers, welcher von $x = r$ bis $x = -3r$ reicht, wird

$$= \pi \int_r^{-3r} \overline{\varphi(x)}^2 . dx = 20 r^3 \pi$$

f) Der Schwerpunkt dieses ganzen Rotationskörpers liegt auf der XAxe um $\frac{2}{3} r$ vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt und zwar nach der negativen Seite der X.

10) Die Gleichung der Quadradrix des Dinostratus (s. S. 134) war in Polarcoordinaten $= u \frac{2r}{\pi} . \frac{\varphi}{\sin\varphi}$.

Der Flächeninhalt eines Sectors, der zwischen zwei Leitstrahlen liegt, die zu den Amplituden $\varphi_1$ und $\varphi_2$ gehören, wird

$$= \frac{2r^2}{\pi^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varphi^2}{\sin\varphi^2} . d\varphi = \frac{2r^2}{\pi^2} . \left\{ \varphi_2^2 \cot g\,\varphi_2 - 2\varphi_2 \log\sin\varphi_2 \right.$$

$$\left. - \varphi_1^2 \cot g\,\varphi_1 + 2\varphi_1 \log\sin\varphi_1 + 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log\sin\varphi . d\varphi \right\}$$

und nimmt man dieses von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, so wird es

$$= \frac{2r^2}{\pi} \log 2.$$

11) Die Gleichung der archimedischen Spirale (s. Seite 136) war: $u=\frac{r\varphi}{2\pi}$.

a) Der Flächeninhalt eines zwischen zwei Leitstrahlen enthaltenen Sectors wird

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u^2\, d\varphi = \frac{r^2}{8\pi^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2\, d\varphi = \frac{r^2}{24\pi^2}\,(\varphi_2^3-\varphi_1^3)$$

b) Die Länge des zwischen denselben Leitstrahlen enthaltenen Bogens wird:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}\,.\,d\varphi = \frac{r}{4\pi}\left\{\varphi_2\sqrt{1+\varphi_2^2}-\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}\right\}$$
$$-\frac{r}{4\pi}\log\left\{\frac{-\varphi_2+\sqrt{1+\varphi_2^2}}{-\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1^2}}\right\}$$

12) Die Gleichung der logarithmischen Spirale (s. Seite 140) war $u=a^{\varphi}$.

a) Der Flächeninhalt eines Sectors wird

$$=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^{2\varphi}\,.\,d\varphi = \frac{1}{4}\,\frac{(a^{2\varphi_2}-a^{2\varphi_1})}{\log a}$$

b) Die Länge des zugehörigen Bogens wird

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{1+(\log a)^2}\,.\,a^{\varphi}\,.\,d\varphi = \sqrt{1+(\log a)^2}\,.\left(\frac{a^{\varphi_2}-a^{\varphi_1}}{\log a}\right)$$

13) Die Gleichung der Spiralen im Allgemeinen (s. S. 139) war $u=a\varphi^n$.

a) Der Flächeninhalt eines Sectors wird

$$=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\varphi_2^{n+1}-\varphi_1^{n+1}}{n+1}\right)$$

b) Die Länge des zugehörigen Bogens wird

$$=a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi^{n-1}\sqrt{\varphi^2+n^2}\,.\,d\varphi$$

welches Integral sich auf bekannte Weise für jeden speciellen Werth von $n$ reduciren lässt.

14) Wenn man für die Lemniscate (s. S. 129) die Gleichung in Polarcoordinaten nimmt, so ist diese $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, also wird

a) der Flächeninhalt eines Sectors

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 . d\varphi = \frac{1}{4} a^2 (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

Nimmt man dieses von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = \frac{1}{4}\pi$, so wird der vierte Theil der Fläche $= \frac{1}{4} a^2$, also der ganze Raum $= a^2$.

b) Die Länge des Bogens wird, in Polarcoordinaten ausgedrückt:

$$= r . \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin\varphi^2}}$$

Da aber der Natur der Curve und natürlich auch ihrer Gleichung gemäss der Winkel $\varphi$ nicht über $\frac{1}{4}\pi$ hinaus wachsen darf, also auch $\sin\varphi$ nie grösser als $\sqrt{\frac{1}{2}}$ werden kann, so ist es unter allen Umständen erlaubt, $\sin\varphi = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}$ zu setzen. Hierdurch wird der Ausdruck für die Länge eines Lemniscaten-Bogens

$$= \frac{r}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\psi^2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} . F(\psi)$$

worin $F(\psi)$ das elliptische Integral der ersten Gattung bedeutet, dessen Modul $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

15) Es soll der Schwerpunkt eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks gefunden werden.

Mögen die Ecken des Dreiecks durch $A$, $B$, $C$, die gegenüberliegenden Seiten respective durch $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden. Ferner sei der Einfachheit wegen der Radius der Kugel $= 1$ und die Lage des Coordinatensystems so gewählt, dass der Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkt der Kugel, die sphärische Seite $b$ in der $XY$ Ebene und die Seite $a$ in der $XZ$ Ebene liegt, so dass also der sphärische Winkel $C$ ein rechter Winkel ist. — Bezeichnet man nun

die Fläche des Dreiecks durch $F$, die Coordinaten ihres Schwerpunkts durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$, so wird:

$$F=\int\int\tfrac{1}{z}\,dx.dy=\int\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.dx.dy$$

$$F.\xi=\int\int\frac{x}{z}.dx.dy=\int\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.dx.dy$$

$$F.\eta=\int\int\frac{y}{z}.dx.dy=\int\int\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.dx.dy$$

$$F.\zeta=\int\int dx.dy$$

Setzt man hierin zur Vereinfachung der Rechnung

$$\frac{\sin a.\cot g\, b.y}{\sqrt{1-y^2}}=\sin u$$

und integrirt zunächst bezüglich auf $x$ zwischen den Grenzen

$$x=\sqrt{1-y^2}.\cos(a-u) \text{ und } x=\sqrt{1-y^2}$$

so erhält man:

$$F=\int(a-u).dy$$

$$F.\xi=\int\sin(a-u).\sqrt{1-y^2}.dy$$

$$F.\eta=\int(a-u).y.dy$$

$$F.\zeta=\int\Big\{1-\cos(a-u)\Big\}.\sqrt{1-y^2}.dy$$

Wenn man diese Integrale von

$$y=0 \text{ bis } y=\sin b$$

oder in Bezug auf $u$, von

$$u = 0 \text{ bis } u = a$$

ausdehnt, so ergiebt sich

$$F = A + B - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$F.\xi = \tfrac{1}{2} c . \sin B . \sin a$$

$$F.\eta = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} c . \cos B$$

$$F.\zeta = \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} c . \cos A.$$

---

**Druckfehler,**

die bis jetzt bemerkt sind.

S. 216. 3. Zeile von oben lies $\frac{1}{\sqrt{c}}$ statt $\frac{2}{\sqrt{c}}$

„ 231. 7. Zeile v. u. lies $\int x^{m-2}$ u. s. w. statt $\int x^{m-1}$

„ 232. 6. Zeile v. ob. fehlt — vor $\frac{1}{\sqrt{a}}$

5 u. 6. v. u. lies $a + 2bx$ statt $ax2bx$

„ 238 unterste Zeile lies $arc\left(\sin = \frac{x-r}{r}\right)$ statt $arc\left(\sin = \frac{x-r}{2}\right)$

„ 239. 2. Zeile von ob. lies $\frac{3}{2}$ statt $\frac{8}{2}$

6. „ von ob. fehlt + vor $\frac{35}{8}$

---

